LES FILTRES NUMERIQUES

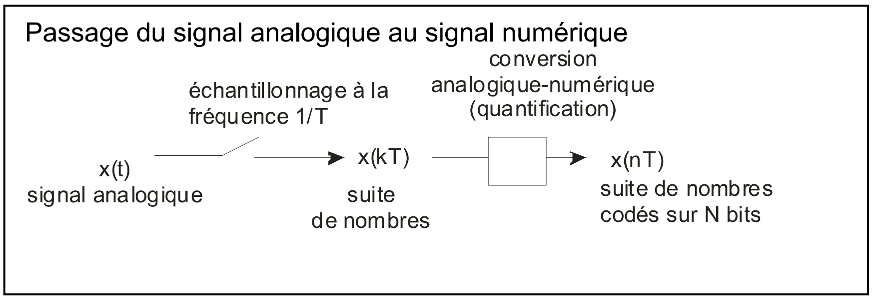
Ce sont des dispositifs qui effectuent sur un signal d'entrée numérique des opérations analogues à un filtrage

SIGNAL NUMERIQUE ET FILTRE NUMERIQUE

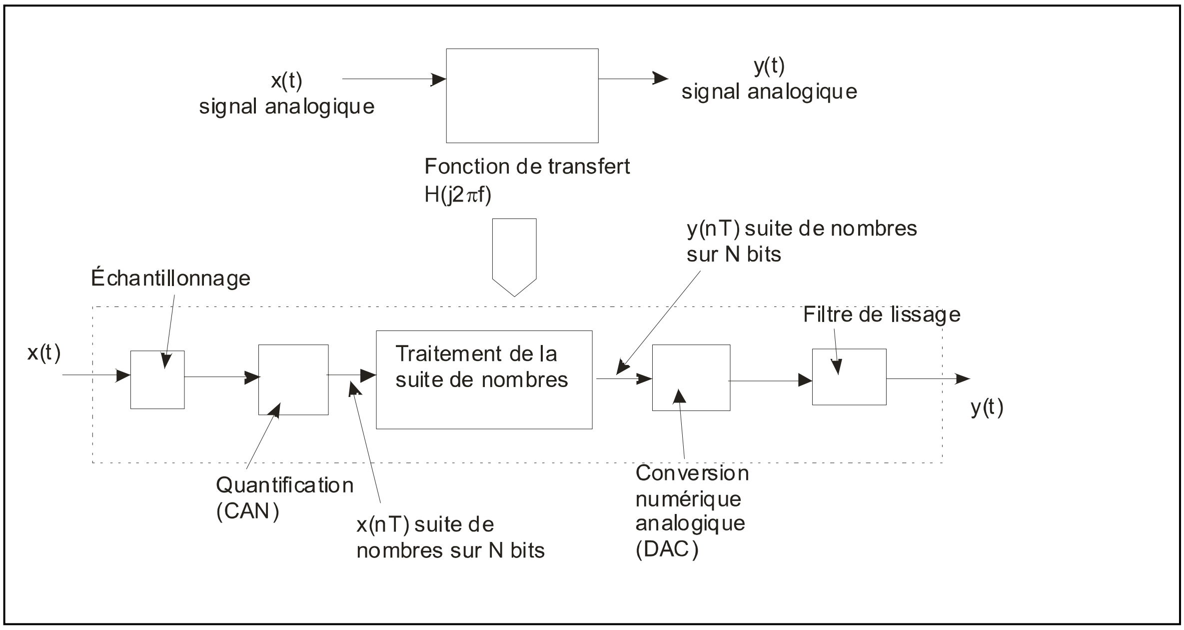
Un signal numérique est une suite de nombres obtenue à partir d'un signal analogique fonction du temps par deux opérations successives :

L'échantillonnage qui consiste à ne conserver du signal que ces valeurs à des instants répartis régulièrement dans le temps

La quantification qui consiste à mesurer chaque échantillon et fournir un nombre.



. Le filtre numérique équivalent à un filtre analogique peut être défini comme le montre la figure suivante :



On appelle souvent **filtre numérique** l'algorithme de traitement appliqué à la suite de nombre x(nT) plus tôt que l'ensemble du dispositif représenté sur la figure qui fait passer de x(t) à y(t) .

PRINCIPE ET PROPRIETES FONDAMENTALES D'UN FILTRE NUMERIQUE

Comme on l'a vu dans les chapitres précédents un filtre analogique est un système différentiel, il applique au signal analogique d'entrée des **opérations** essentiellement **linéaires**. Or après numérisation on ne dispose que d'une suite de nombres. L'opération linéaire la plus générale que l'on puisse appliquer à cette suite est une combinaison linéaire qui à un instant kT (T étant la période d'échantillonnage) délivre un nombre y(kT) c'est-à-dire :

$$y(nT) = \sum_{k=A}^{P} a_K x[(n-k)T] + \sum_{l=0}^{P} b_l y[(n-l)T]$$

Si tous les coefficients b_l sont nuls la valeur de sortie à un instant kT ne dépend que des échantillons présentés à l'entrée et non des sorties précédentes. Si la limite inférieure A de la première sommation est nulle seuls les échantillons d'entrée antérieurs sont pris en compte, le filtre est un **filtre temps réel**, sinon les valeurs de x à des instants futurs (pour un indice supérieur à n) sont également utilisés , le filtre ne peut être appliqué qu'a une suite de nombres préalablement enregistrée, on parle de **filtres en temps différé.**

Si les coefficients b ne sont pas nuls la valeur y de sortie à un instant nT dépend non seulement des valeurs d'entrée mais aussi des valeurs de sorties précédentes, c'est **un filtre récursif**.

Deux exemples intuitifs mettent en évidence les propriétés essentielles de ces filtres.

Le dérivateur

Il fait correspondre à un signal x(t) sa dérivée dx(t)/dt .En analogique le dérivateur parfait à comme fonction de transfert

H(p)=p

Dans le cas présent : $Lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$ ne peut être évaluée que de façon approchée puisque Δt ne peut pas être inférieur à la période d'échantillonnage. Le différentiateur numérique sera donc défini par :

$$y(nT) = \left[x(nT) - x[(n-1)T]\right]\frac{1}{T}$$

ou en prenant T comme unité de temps :

$$y(n) = x(n) - x(n-1)$$

Pour évaluer quel est le comportement d'un tel filtre en fonction de la fréquence du signal d'entrée (avant qu'il ne soit échantillonné) , prenons comme signal d'entrée la fonction propre

x(t)=exp(jωt)

Les échantillons sont alors : $xtkT) = e^{j\omega kT}$

Et à l'instant nT le signal de sortie vaut :

$$y(nT) = e^{j\omega nT} - e^{j\omega(n-1)T} = e^{j\omega nT}[1 - e^{j\omega T}]$$

On passe de la suite d'entrée x(nT) à celle de sortie par une multiplication par [1-$e^{j\omega T}$]. qui ne dépend que de la fréquence et non de l'indice n .Ce terme multiplicatif est la **fonction de transfert isochrone du filtre** . Nous la noterons :

$$H_N(j\omega) = 1 - e^{j\omega T}$$

qui se développe en :

$$H_N(j\omega) = (1 - \cos\omega T) + j\sin(\omega T)$$

son module est :

$$\left|H_N(j\omega)\right| = \sqrt{(1-\cos\omega T)^2 + \sin^2\omega T} = \sqrt{2}.\sqrt{1-\cos\omega T}$$

surprise , cette **fonction de transfert est périodique** .

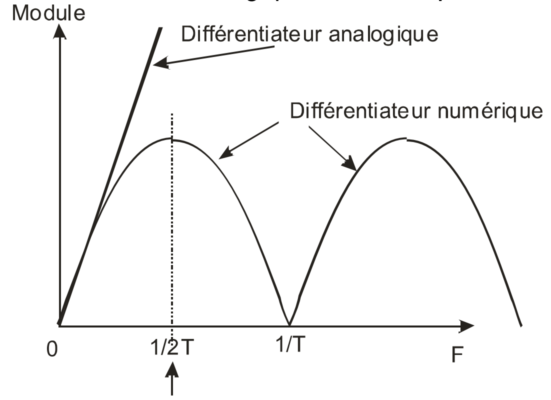
Si ω est petit $\sqrt{1-\cos\omega T} \Rightarrow \sqrt{1-[1-\omega^2 T^2/2]} = \dfrac{\omega T}{\sqrt{2}}$

Et la fonction de transfert tend vers :

$$Lim_{\omega\mapsto 0}\left|\ H_N(j\omega)\ \right| = \omega T$$

C'est bien le module du dérivateur analogique parfait .

Comparaison des modules des filtres différentiateur analogique et numérique



La périodicité est une conséquence de l'échantillonnage.Le spectre d'un signal échantillonné étant périodique il est normal que la fonction de transfert du filtre numérique possède la même propriété.C'est une différence essentielle existant entre les filtres analogiques et numériques**. Il est donc impossible de réaliser un filtre numérique rigoureusement équivalent à filtre analogique pour toute fréquence.**

Un filtre numérique doit toujours être précédé d'un filtre passe bas qui limite l'étendue du spectre du signal d'entrée. C'est le **filtre anti-repliement** (anti- aliasing)

L'intégrateur

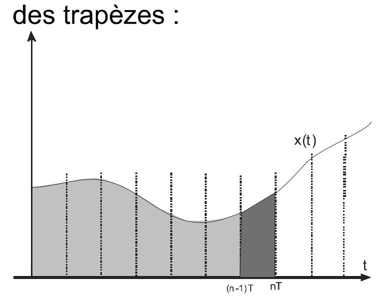
La sortie est l'intégrale de l'entrée : $y(t) = \int_0^t x(t)dt$

En analogique la fonction de transfert d'un intégrateur parfait est : $H(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega}$

L'intégrale est la surface sous la courbe que l'on peut évaluer par la méthode des trapèzes La surface sous la courbe à l'instant nT est celle à l'instant (n-1)T augmentée de la surface hachurée en gris foncé qui peut être approximée par celle du trapèze soit

$$y(nT) = y[(n-1)T] + \left[\frac{x[(n-1)T] + x(nT)}{2}\right].T$$

Calcul de l'intégrale par la méthode des trapèzes :



C'est l'algorithme de calcul du filtre intégrateur. C'est dans ce cas un filtre récursif puisque la sortie à un instant nT dépend de ses valeurs aux instants précédents.

Dans ce cas la notion de fonction de transfert isochrone apparaît moins clairement , nous y reviendrons plus loin.