

7.1. Rappels

But de la correction

Les trois qualités d'un asservissement sont: la précision, la vélocité et l'amortissement. Les lieux de Bode de $T(j\omega)$ en boucle ouverte (ci-contre) permettent de bien comprendre le but de la correction:

. Pour améliorer la précision (voir tableau des erreurs statiques au paragraphe 6.5.4) il faut, pour une classe donnée, remonter la courbe de gain dans le domaine des basses pulsations (augmenter le gain en position ou en vitesse).

. Pour améliorer la vélocité (voir le paragraphe 6.6) il faut augmenter la pulsation ω_{-6dB} donc tirer la courbe de gain vers la droite.

Nous voyons bien qu'il n'y a aucune incompatibilité entre ces deux premières qualités car si on relève l'ensemble de la courbe de gain on améliore ensemble la précision et la vélocité.

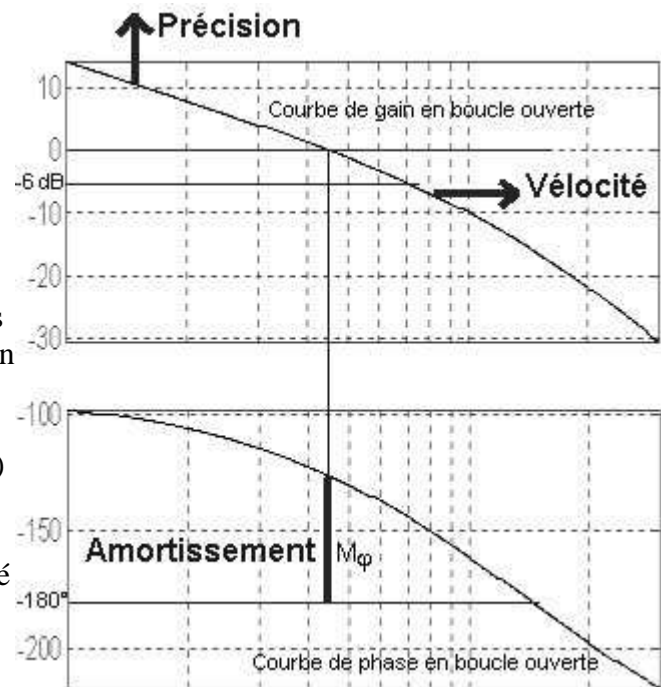
Malheureusement il y a l'amortissement de la boucle qui est une qualité essentielle.

Pour avoir un bon amortissement il faut une bonne marge de phase M_j (voir les lieux de Bode du paragraphe 6.3).

Et là nous voyons bien que c'est incompatible avec une translation vers le haut de la courbe de gain en boucle ouverte. Il y a donc toujours dans une boucle d'asservissement un dilemme entre le couple de qualités précision-vélocité et la qualité amortissement (qualité indispensable).

On peut donc en déduire que le but de la correction est de remonter la courbe de gain (en boucle ouverte) dans le domaine des basses pulsations et de tirer cette courbe de gain vers la droite dans le domaine des hautes pulsations, tout en conservant des marges de stabilité satisfaisantes (c'est là qu'intervient la courbe de phase !).

Nous allons, dans les paragraphes suivants, étudier la fonction de transfert des principaux correcteurs et la modification des lieux de Bode en boucle ouverte apportée par la mise en place du correcteur.



7.2. Amélioration de la précision (correcteur PI)

7.2.1 Correcteur P.I. (actions proportionnelle et intégrale)

Ce correcteur permet un changement de classe de l'asservissement (de la classe 0 à la classe 1) donc permet une amélioration très sensible de la précision (plus d'erreur de position). Par contre, le retard de phase apporté par ce correcteur ne peut en aucune façon améliorer la qualité vélocité de l'asservissement, au contraire!

Fonction de transfert du correcteur P.I.:

$$R(p) = K[1 + 1/(T_i p)] = K(1 + T_i p) / (T_i p)$$

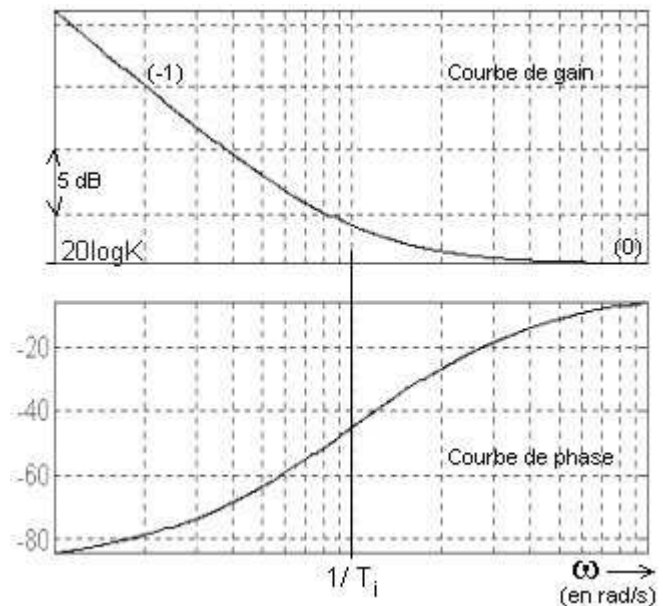
Transmittance harmonique:

$$R(j\omega) = K(1 + j\omega T_i) / (j\omega T_i)$$

$$\text{Module } [R(j\omega)] = [K(1 + \omega^2 T_i^2)^{1/2}] / \omega T_i$$

$$\text{Phase } [R(j\omega)] = -90^\circ + \arctan(\omega T_i)$$

Les lieux de Bode de $R(j\omega)$ sont représentés ci-contre.



Critère de réglage:

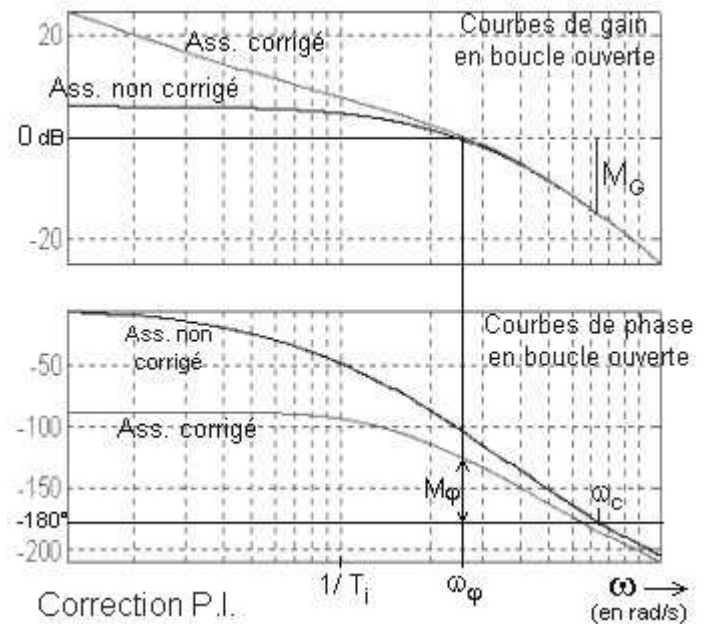
Si on suppose que l'asservissement non corrigé, de classe 0, est très bien amorti (par exemple avec une marge de phase de 75°), on peut introduire le correcteur P.I. en gardant le même réglage de gain (action proportionnelle).

Afin de conserver un bon amortissement il faut que la pulsation $1/T_i$ soit très inférieure à la pulsation critique de l'asservissement non corrigé, de façon à ne pas trop diminuer la marge de phase. Mais en classe 1 la marge de phase nécessaire est plus petite qu'en classe 0.

Pratiquement, on règle:

$$T_i = (7,5 / \omega_c)$$

Comparez ci-contre les lieux de Bode en boucle ouverte avec et sans correcteur. Avec le critère de réglage énoncé, on constate que la pulsation ω_j , à l'intersection de la courbe de gain avec l'axe 0 dB, est pratiquement inchangée après correction.

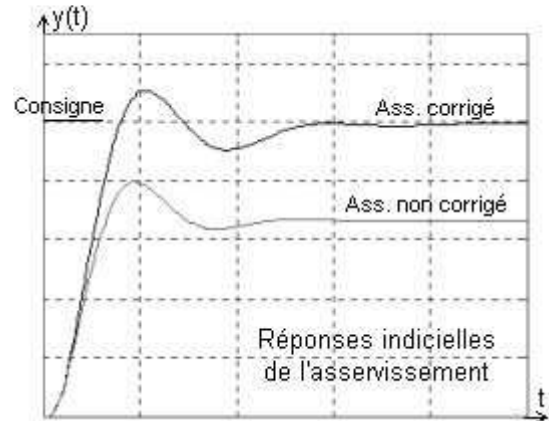


On constate sur les courbes de phase une diminution de la marge de phase d'environ 20° à 25° après correction, ce qui donne une marge de phase M_j optimale en classe 1.

On constate aussi que la pulsation critique, après correction, est très légèrement inférieure, mais ceci n'affecte en rien la marge de gain qui reste largement suffisante.

Les réponses indicielles de l'asservissement (en boucle fermée bien entendu) non corrigé puis corrigé par correcteur P.I. sont données ci-contre: Sans correction l'erreur de position est très importante car pour assurer un bon amortissement le gain de boucle est faible (ici seulement 2 unités donc erreur de 33%).

Grâce à l'action intégrale la réponse de l'asservissement corrigé présente une erreur de position nulle. Par contre le temps de montée est plus grand.



7.2.2 Correcteur à retard de phase

Ce correcteur ne change pas la classe de l'asservissement mais remonte la courbe de gain en boucle ouverte dans le domaine des basses pulsations, ce qui permet de diminuer soit l'erreur de position en classe 0 soit l'erreur de traînage en classe 1.

Fonction de transfert du correcteur à retard de phase:

$$R(p) = K(1 + b.T_i p) / (1 + T_i p) \quad \text{avec } b < 1.$$

Transmittance harmonique: $R(j\omega) = K(1 + j\omega b T_i) / (1 + j\omega T_i)$

$$|R(j\omega)| = [K(1 + \omega^2 b^2 T_i^2)^{1/2}] / (1 + \omega^2 T_i^2)^{1/2}$$

$$\angle R(j\omega) = \arctan(\omega b T_i) - \arctan(\omega T_i)$$

b étant inférieur à 1, l'argument est toujours négatif.

Les lieux de Bode de $R(j\omega)$ sont représentés ci-contre:

La courbe de phase présente un axe de symétrie pour une pulsation ω_M qui est la moyenne géométrique des deux pulsations $1/(bT_i)$ au numérateur et $1/T_i$ au dénominateur: $\omega_M = 1/(T_i \cdot b^{1/2})$

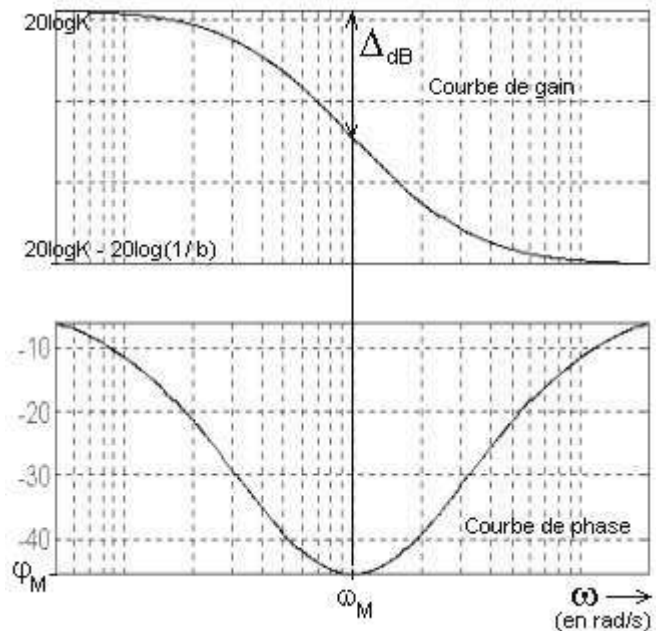
Pour cette pulsation le retard de phase maximum est:

$$j_M = \arctan(b^{1/2}) - \arctan(b^{-1/2}) = -\arcsin[(1-b)/(1+b)].$$

Pour cette pulsation ω_M , la diminution du gain par rapport à $20\log K$ est:

$D_{dB} = -10\log(1/b)$. Ci-dessous sont données les valeurs de j_M et de D_{dB} pour quelques valeurs de b.

b	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05
j_M	- 19,5°	- 25,4°	- 32,6°	- 41,8°	- 54,9°	- 64,8°
D_{dB}	- 3 dB	- 4 dB	- 5,2 dB	- 7 dB	- 10 dB	- 13 dB



Nous allons montrer comment ce type de correction améliore la précision de l'asservissement en prenant un exemple en classe 0. Dans ce cas c'est l'erreur de position qui est plus petite. En classe 1 ce serait l'erreur de traînage qui serait plus petite.

On suppose que l'asservissement non corrigé, de classe 0, est très bien amorti (par exemple avec une marge de phase de 75°) mais son erreur de position est beaucoup trop grande. On souhaite augmenter le gain de boucle dans un rapport k (en pratique: maximum 5). Dans notre exemple nous avons choisi $k = 3,75$. L'erreur de position de l'asservissement non corrigé est de 33,3% (gain de boucle = 2 pour avoir un bon amortissement). Après correction l'erreur de position sera réduite à 11,7%.

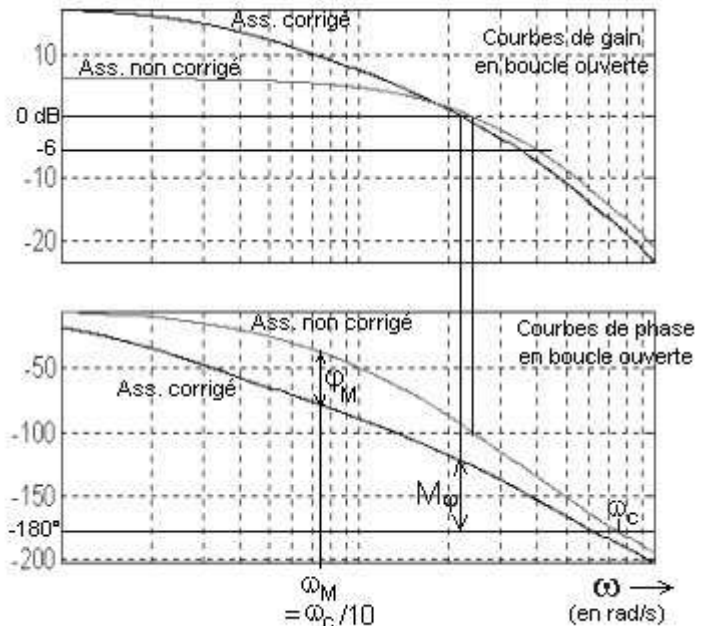
Critère de réglage:

On règle $b = 0,75 / k$ donc $b = 0,2$ pour notre exemple.

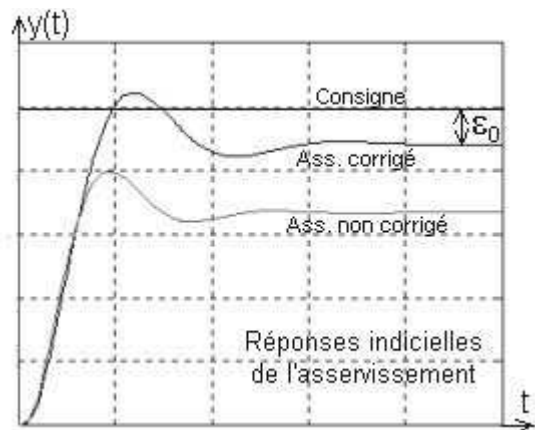
Puis nous calons la pulsation centrale du correcteur à une décade en dessous de la pulsation critique de l'asservissement non corrigé, afin de ne pas trop diminuer la marge de phase:

$$\omega_M = \omega_c / 10 \text{ donc } T_i = 10 / (\omega_c \cdot b^{1/2}) .$$

Avec ces réglages les marges de stabilité restent suffisantes. Par contre la bande passante de l'asservissement diminue un peu, donc l'amélioration de la précision se fait au détriment de la vélocité avec un correcteur à retard de phase. Les réponses indicielles (en boucle fermée bien entendu) sont données ci-contre:



Correction à retard de phase d'un asservissement de classe 0



Si l'on faisait un exemple en classe 1 (erreur de position nulle), nous aurions les mêmes résultats avec le même critère de réglage, simplement ce serait l'erreur de traînage qui serait divisée par k .

En fait ce type de correction est très peu utilisé, car avec les mêmes composants on peut réaliser un correcteur à avance de phase qui donne des résultats beaucoup plus intéressants.

7.3. Amélioration de la précision et de la vélocité (correcteur PD)

Ce correcteur ne change pas la classe de l'asservissement mais permet de remonter la courbe de gain en boucle ouverte dans le domaine des basses pulsations, ce qui diminue soit l'erreur de position en classe 0 soit l'erreur de traînage en classe 1. Mais surtout ce correcteur décale la courbe de gain en boucle ouverte vers la droite (hautes pulsations) ce qui permet une augmentation importante de la bande passante de l'asservissement, donc une amélioration sensible de la vélocité.

Fonction de transfert du correcteur P.D ou à avance de phase:

$$R(p) = K[1 + (T_d p)/(1 + t_d p)] = K(1 + T_a p) / (1 + b.T_a p) \quad \text{avec } b < 1.$$

La première écriture de $R(p)$ correspond à la fonction de transfert du correcteur P.D. et la seconde à la fonction de transfert du correcteur à avance de phase. Mais ces deux fonctions de transfert sont égales avec:

$$t_d = b.T_a \quad \text{et} \quad T_a = T_d + t_d.$$

Nous allons travailler avec la seconde expression, qui est sous une forme canonique.

Transmittance harmonique:

$$R(j\omega) = K(1 + j\omega T_a) / (1 + j\omega b T_a)$$

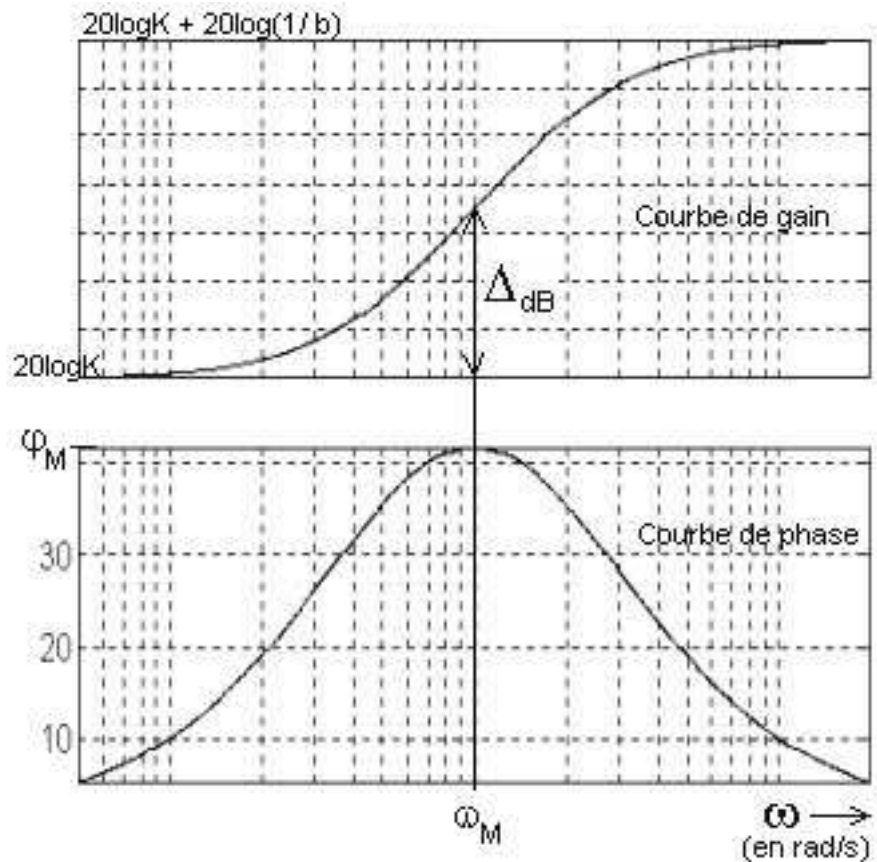
$$\zeta R(j\omega) \zeta = [K(1 + \omega^2 T_a^2)^{1/2}] / (1 + \omega^2 b^2 T_a^2)^{1/2}$$

$$\angle R(j\omega) = \arctan(\omega T_a) - \arctan(\omega b T_a)$$

b étant inférieur à 1, l'argument est toujours positif.

Les lieux de Bode de $R(j\omega)$ sont représentés ci-contre:

La courbe de phase présente un axe de symétrie pour une pulsation ω_M qui est la moyenne géométrique des deux pulsations $1/T_a$ au numérateur et $1/bT_a$ au dénominateur: $\omega_M = 1/(T_a \cdot b^{1/2})$



Pour cette pulsation l'avance de phase maximum est:

$$j_M = \arctan(b^{-1/2}) - \arctan(b^{1/2}) = \arcsin[(1-b)/(1+b)].$$

Pour cette pulsation ω_M , l'augmentation du gain par rapport à $20\log K$ est: $D_{dB} = 10\log(1/b)$.

b	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05
j_M	+ 19,5°	+ 25,4°	+ 32,6°	+ 41,8°	+ 54,9°	+ 64,8°
D_{dB}	+ 3 dB	+ 4 dB	+ 5,2 dB	+ 7 dB	+ 10 dB	+ 13 dB

On suppose que l'asservissement non corrigé, de classe 0, est très bien amorti (par exemple avec une marge de phase de 75°) mais son erreur de position est grande et son temps de montée trop important. On souhaite réduire l'erreur de position et le temps de montée grâce au correcteur à avance de phase. Plus on choisira b faible, plus on améliorera les qualités précision et vitesse. Mais en pratique on se limite à $b = 0,05$.

Critère de réglage:

On règle b en fonction de l'objectif fixé (dans un correcteur P.D. on prend généralement $b = 0,1$). Pour notre exemple nous choisissons $b = 0,2$. La pulsation centrale du correcteur est alors réglée à environ une octave à droite de la pulsation critique de l'asservissement non corrigé:

$$w_M = w_c / (1,25 \cdot b^{1/2}) \text{ donc } T_a = 1,25 / w_c .$$

Avec ces réglages les marges de stabilité seront satisfaisantes en adoptant un gain K compris entre 2 et 2,5.

Pour notre exemple nous avons pris $K = 2$.

Les lieux de Bode ci-contre montrent qu'avec ces réglages les objectifs décrits au paragraphe 7.1 sont atteints.

Pratiquement, en classe 0 on peut sans difficulté avec le correcteur à avance de phase diviser l'erreur de position par 2, et diviser le temps de montée par 2. On a alors un asservissement beaucoup plus performant que sans correction, nous pourrions dire « 4 fois » plus performant.

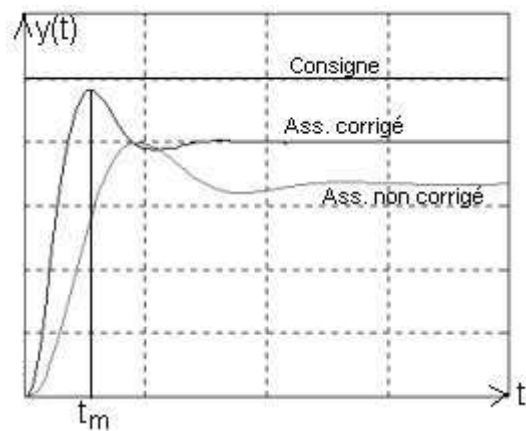
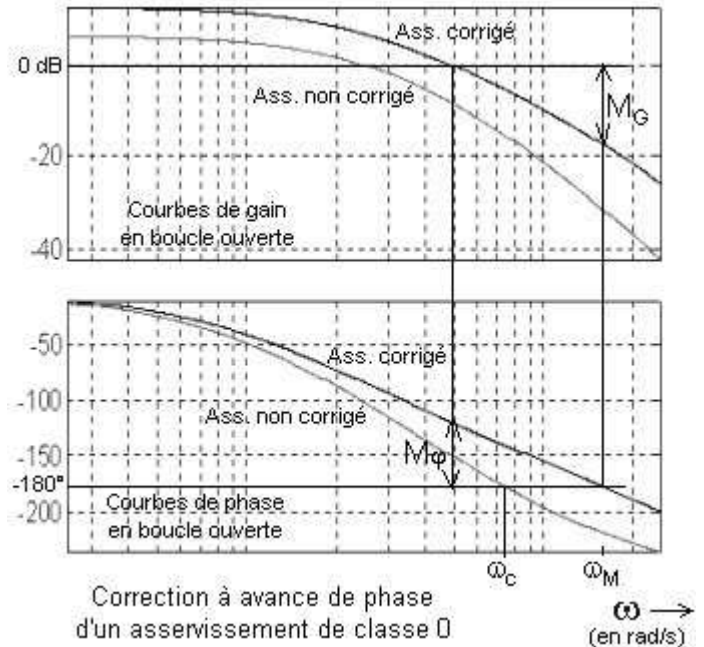
Les réponses indicielles (en boucle fermée bien entendu) sont données ci-contre:

Nous allons maintenant examiner la correction P.D. d'un asservissement de classe 1.

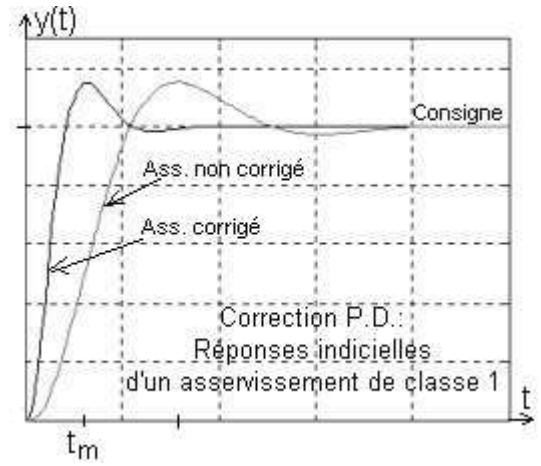
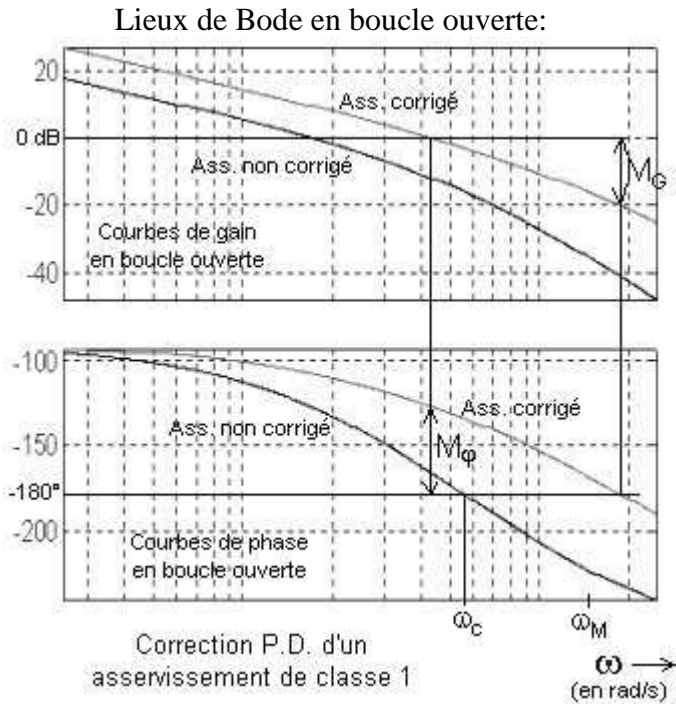
Critère de réglage:

$$b = 0,1 \quad T_d = 0,9T_a = 1,125/w_c \quad \text{donc } T_d = 0,18T_c \text{ puisque } T_c = 2p/w_c$$

Rappel: w_c est la pulsation critique avant correction.



La valeur de K permettant de retrouver de bonnes marges de stabilité est alors comprise entre 2,5 et 3 (dans l'exemple présenté à la page suivante: $K = 2,8$). Ainsi l'erreur de traînage de l'asservissement est divisée par K , divisée par 2,8 dans l'exemple qui suit. Bien sûr la bande passante sera aussi sensiblement augmentée (dans un rapport de l'ordre de 2,5).



L'asservissement corrigé est 2,8 fois plus précis (erreur de traînage 2,8 fois plus petite), et environ 2,5 fois plus vélocité (temps de montée divisé par 2,5). On peut dire que l'asservissement corrigé est « 7 fois » plus performant. De plus, sur les lieux de Bode en boucle ouverte, on constate que les marges de stabilité sont les mêmes avec correction que sans correction (amortissement identique de la boucle).

7.4. Correction PID

La correction P.I.D. est l'association d'une correction P.I. (paragraphe 7.2.1) et d'une correction P.D. (paragraphe 7.3)

D'ailleurs, la fonction de transfert du correcteur P.I.D. de type série correspond au produit des fonctions de transfert du correcteur P.I. et du correcteur P.D.:

$$R(p) = K[1 + 1/(T_i p)] [1 + (T_d p)/(1 + t_d p)]$$

$$= [K(1 + T_i p)(1 + T_a p)] / [T_i p(1 + b T_a p)]$$

avec $t_d = b \cdot T_a$ et $T_a = T_d + t_d$.

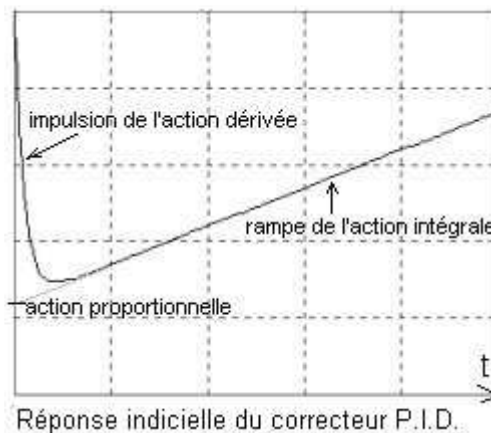
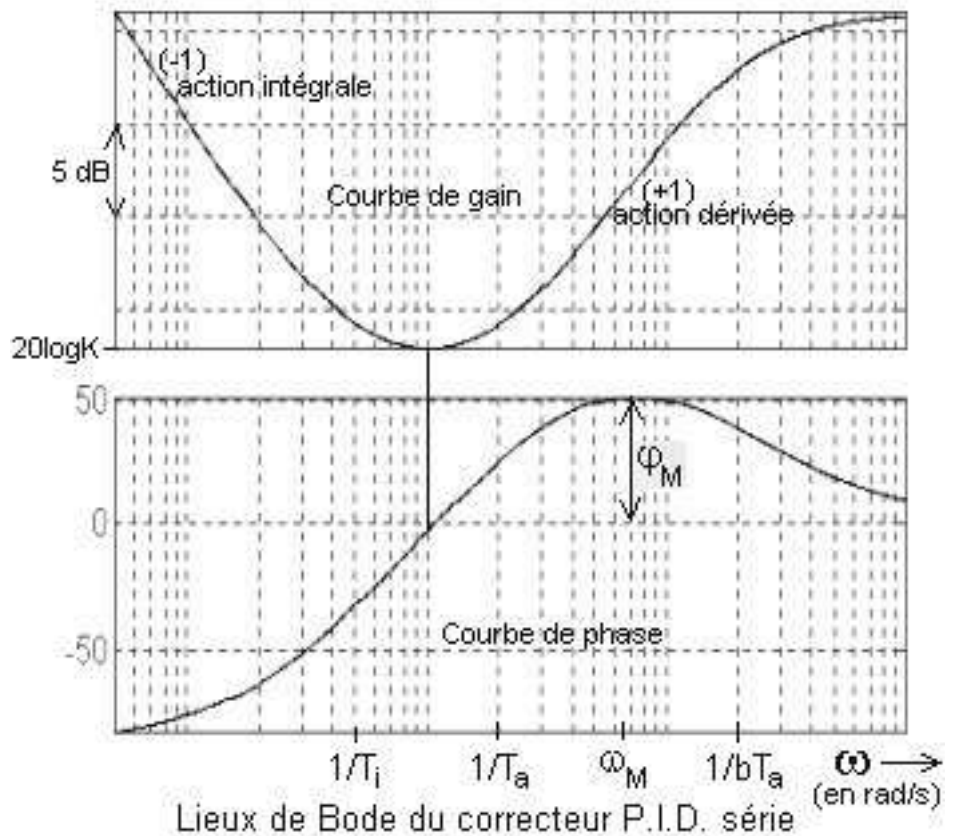
Transmittance harmonique:

$$R(j\omega) = [K(1 + j\omega T_i)(1 + j\omega T_a)] / [(j\omega T_i)(1 + j\omega b T_a)]$$

$$\arg R(j\omega) = -90^\circ + \arctan(\omega T_i) + \arctan(\omega T_a) - \arctan(\omega b T_a)$$

Les lieux de Bode de $R(j\omega)$ et la réponse indicielle du correcteur seul sont représentés ci-contre:

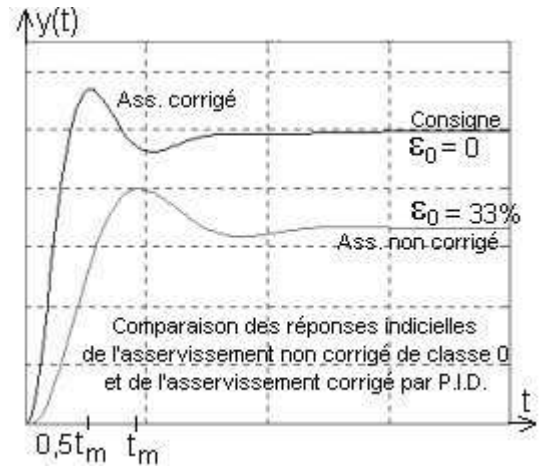
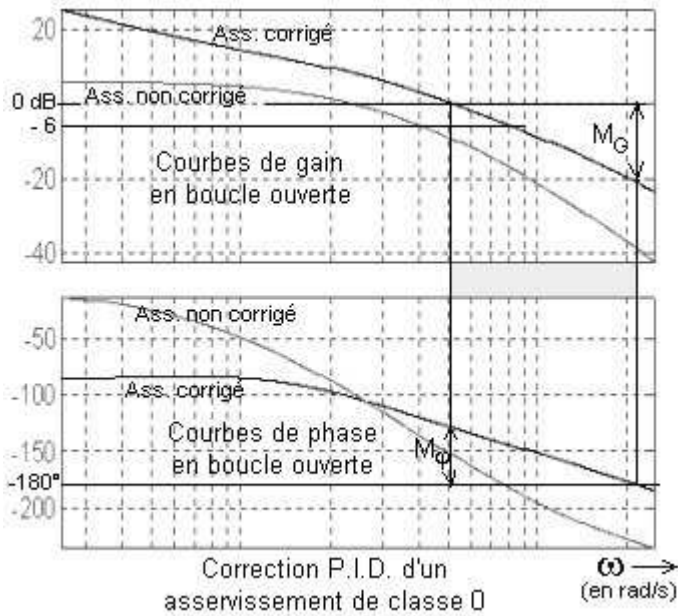
Si on associe les deux critères de réglage vus précédemment, on obtient les améliorations cumulées des deux corrections P.I. et P.D.



Exemple d'un asservissement non corrigé de classe 0, puis corrigé par P.I.D. de type série:

L'asservissement non corrigé a une précision statique très mauvaise (erreur de position de 33%) et une vitesse médiocre. Grâce au correcteur P.I.D. l'erreur de position de l'asservissement corrigé est nulle (quelles que soient les perturbations), et la vitesse est deux fois meilleure (temps de montée divisé par 2).

Les lieux de Bode en boucle ouverte d'une part, et les réponses indicielles en boucle fermée d'autre part sont représentés ci-dessous.



Le correcteur P.I.D. de type parallèle a une fonction de transfert différente mais qui, après factorisation, peut se ramener à la forme du P.I.D. série. Les conclusions sont donc identiques. Nous étudierons, dans les paragraphes suivants, plus spécialement le correcteur P.I.D. de type parallèle qui est le plus utilisé.

7.5 Correction tachymétrique

Ce type de correction est utilisé lorsque la *dérivée de la grandeur asservie* est une autre grandeur physique que l'on peut mesurer grâce à un second capteur. Disons que ce type de correction se prête bien aux processus de classe 1: s'il y a un intégrateur dans le processus, nous pouvons mesurer la grandeur d'entrée de cet intégrateur.

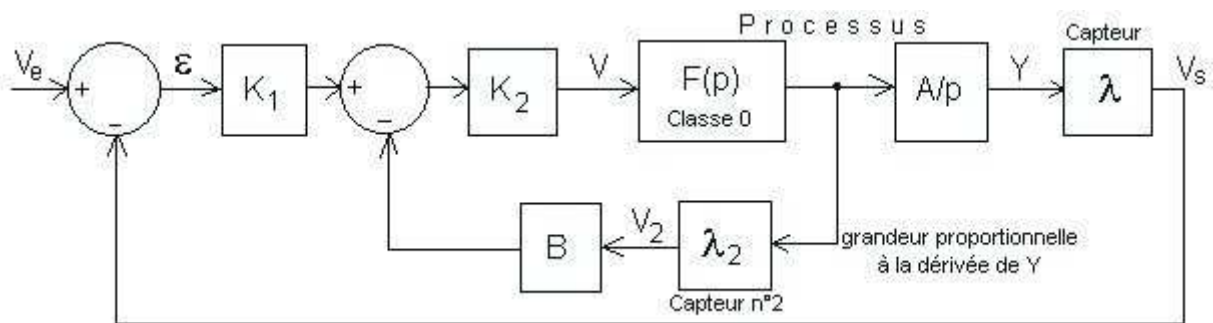
Exemples: Dans un asservissement de position (en translation ou en rotation) on pourra également mesurer la vitesse (qui est la dérivée de la position).

Dans un asservissement de niveau (hauteur de liquide dans une cuve, équivalent à une pression), on pourra également mesurer la résultante des débits (qui est proportionnelle à la dérivée de la pression donc du niveau). S'il y a un débit entrant et un débit sortant, on pourra utiliser un capteur de débit différentiel.

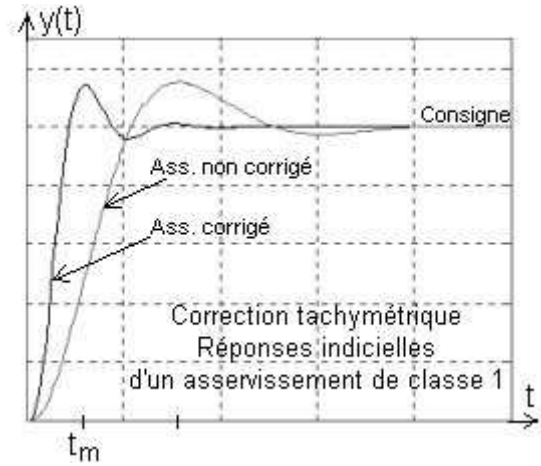
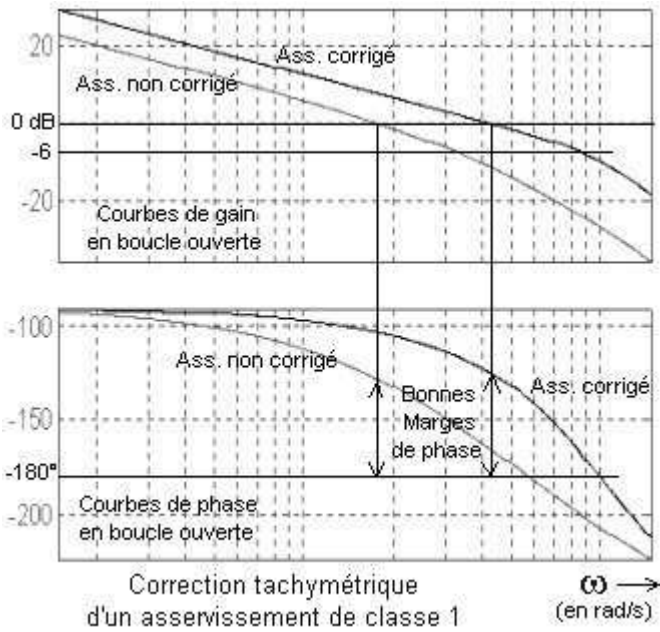
Dans un asservissement d'exposition lumineuse, on pourra également mesurer l'éclairement (qui est la dérivée de l'exposition).

Mais dans la majorité des asservissements nous ne pouvons pas « capter » la dérivée de la grandeur asservie. La correction tachymétrique n'est donc pas un type de correction généralisable. Cependant elle donne d'excellents résultats.

La correction tachymétrique consiste à créer, à l'intérieur de la boucle d'asservissement, une boucle secondaire à partir de la tension de mesure de la *grandeur dérivée* (par exemple on crée une boucle d'asservissement de vitesse dans la boucle d'asservissement de position), selon le schéma fonctionnel ci-dessous:



Tout d'abord, sans correction tachymétrique, donc avec $B = 0$, on règle $K_2 = 1$, puis on recherche la valeur optimale du gain K_1 pour avoir un bon amortissement de la boucle (marge de phase de 50°). Puis on augmente nettement le gain K_2 (par exemple $K_2 = 6,25$). Il existe alors une valeur optimale du gain B (dans la chaîne de réaction de la boucle secondaire), qui permet de retrouver un bon amortissement de la boucle principale.



L'asservissement ainsi corrigé aura une erreur de traînage $K_2^{1/2}$ fois plus petite et une bande passante $K_2^{1/2}$ fois plus grande.

Avec $K_2 = 6,25$ l'asservissement corrigé sera 2,5 fois plus précis et 2,5 fois plus vélocé.

7.6. Critère de réglage de Ziegler-Nichols

C'est un critère de réglage très facile à mettre en œuvre et qui donne de bons résultats. Il ne peut être utilisé que pour le réglage d'un correcteur P.I., P.D. ou P.I.D.

Afin de privilégier la qualité d'amortissement de l'asservissement, nous proposerons des réglages différents que ceux que préconisaient Ziegler et Nichols (notamment une action proportionnelle K plus faible). Ainsi nous appliquerons le critère de Z.N.M. (M comme modifié).

L'avantage incontestable de ce critère de réglage est qu'il peut s'appliquer aussi bien sur le modèle théorique qu'expérimentalement sur l'asservissement réalisé.

La démarche est simple: déterminer les conditions du régime critique de la boucle non corrigée (avec uniquement le réglage d'un gain K): voir le paragraphe 6.2.5. Nous obtenons deux valeurs: ω_c et K_c . ω_c est la pulsation de la sinusoïde engendrée par la boucle « juste instable ».

On en déduit la période de cette sinusoïde: $T_c = 2\pi / \omega_c$.

Si nous faisons l'étude expérimentale du régime critique de la boucle non corrigée, après avoir trouvé le réglage critique K_c qui rend la boucle juste instable, nous mesurons directement la période T_c de la sinusoïde engendrée.

Les réglages de Z.N.M. sont les suivants:

Type de correcteur --> Paramètres réglables	P.	P.I.	P.D.	P.I.D série	P.I.D parallèle
K (valeurs indicatives)	0,2K _c	0,25K _c	0,35K _c	0,18K _c	0,3K _c
T _i		0,9T _c		0,3T _c	0,5T _c
T _d			0,2T _c	0,2T _c	0,12T _c

La fonction de transfert du correcteur P.I.D. série est:

$$R(p) = K[1 + 1/T_i p][1 + T_d p / (1 + 0,1 T_d p)]$$

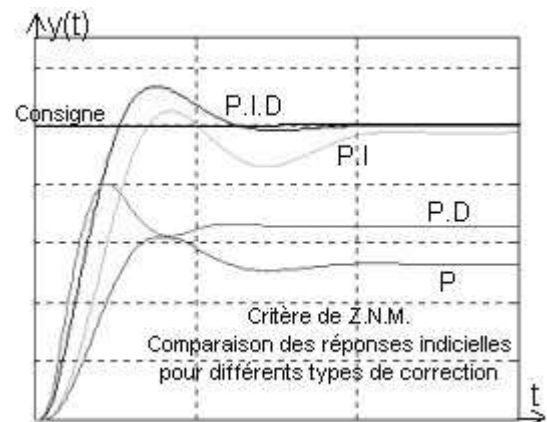
La fonction de transfert du correcteur P.I.D. parallèle est:

$$R(p) = K[1 + 1/T_i p + T_d p / (1 + 0,1 T_d p)]$$

Les valeurs de T_i et de T_d étant données, on doit ajuster l'action proportionnelle K pour obtenir un amortissement satisfaisant.

Les valeurs de K données dans le tableau sont donc indicatives.

En fonction du système asservi on peut être amené à augmenter ou diminuer ce gain pour obtenir par exemple, par la théorie, une marge de phase donnée, ou expérimentalement, un dépassement donné de la réponse indicielle.



Les réponses indicielles ci-contre permettent de comparer, sur un exemple, les performances d'un asservissement en classe 0 sans correction (P), puis avec correction P.D., et en classe 1, correction P.I. puis correction P.I.D.

Les quatre réponses étant bien amorties, on peut comparer les qualités précision et vélocité:

Classement du plus précis au moins précis: P.I.D., P.I., P.D., P.

Classement du plus véloce au moins véloce: P.D., P.I.D., P., P.I.

7.7. Critère de réglage de Naslin

Ce critère donne des résultats excellents, mais il a deux inconvénients: c'est un critère purement algébrique, donc qui nécessite pas mal de calculs, et aussi pour que les résultats soient « excellents », il faut que la fonction de transfert du processus, à partir de laquelle on applique le critère de Naslin, reflète avec précision le comportement réel du système.

Ce critère peut s'appliquer quel que soit le type de correcteur, pas seulement les correcteurs classiques vus pour le critère de Z.N.M. mais pour n'importe quel autre correcteur.

Il faut connaître la fonction de transfert $F(p)$ de l'ensemble ampli-processus-captur.

Soit $R(p)$ la fonction de transfert du correcteur (avec ses paramètres réglables).

On exprime la fonction de transfert $T(p)$ en boucle ouverte: $T(p) = R(p).F(p) = n(p)/d(p)$.

Le critère de Naslin consiste à régler les « rapports caractéristiques » du dénominateur de la fonction de transfert $W(p)$ en boucle fermée.

On sait que $W(p) = T(p) / [1 + T(p)] = n(p) / [n(p) + d(p)]$.

Donc il suffit d'ordonner le polynôme $n(p) + d(p)$.

Ce polynôme peut s'écrire: $n(p) + d(p) = a_0 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3 + \dots + a_np^n$.

Ce polynôme comporte $(n-1)$ rapports caractéristiques:

$$r_1 = a_1^2/(a_0.a_2) \quad r_2 = a_2^2/(a_1.a_3) \quad \dots \quad r_k = a_k^2/(a_{k-1}.a_{k+1}) \quad \dots \quad r_{n-1} = a_{n-1}^2/(a_{n-2}.a_n).$$

La valeur de chaque rapport caractéristique dépend de la valeur des paramètres de réglage du correcteur de fonction de transfert $R(p)$.

Le critère de Naslin consiste à régler les premiers rapports caractéristiques à **2**.

Par exemple, avec un correcteur P.I.D. on a 3 paramètres de réglage (K , T_i et T_d), on pourra régler :

$$r_1 = r_2 = r_3 = 2.$$

Dans ce cas il s'agit donc de résoudre un système de trois équations à trois inconnues.

Il convient ensuite de vérifier que les rapports caractéristiques suivants (non réglables) sont supérieurs à 2. Dans le cas contraire il faut légèrement majorer la valeur des premiers (jusque 2,2).

Il y a une très grande sensibilité entre la valeur des premiers rapports caractéristiques du dénominateur de $W(p)$ et l'amortissement de ce système bouclé. Si on augmente la valeur de ces rapports caractéristiques (par exemple 2,3) l'asservissement sera trop amorti (réponse apériodique); si on les diminue (par exemple 1,7) l'asservissement sera trop faiblement amorti (réponse avec des oscillations).

7.8. Exemple de réalisation des correcteurs PID série et parallèle

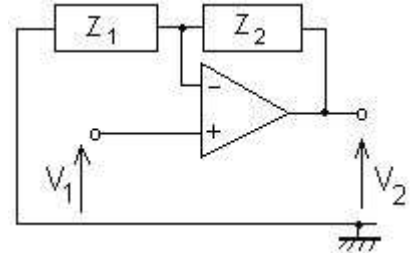
Nous proposons dans ce paragraphe des schémas de réalisation de correcteurs en utilisant comme composants de base des amplificateurs opérationnels, des résistances, et des condensateurs.

L'un des deux montages de base utilisé est représenté ci-contre:

La fonction de transfert V_2 / V_1 de ce montage est :

$$V_2 / V_1 = 1 + Z_2 / Z_1 .$$

D'autre part, on rappelle que l'impédance symbolique d'un condensateur est $1 / C_p$ (voir le paragraphe 2.3.4) .



Matérialisation des correcteurs classiques:

Correcteur P.I.	$R(p) = V(p)/e(p) = K(1 + 1/T_{ip})$ $K = 1 + R_2/R_1$ $T_i = R_3C$	
Correcteur à retard de phase	$R(p) = K(1+bT_{ap})/(1+T_{ap})$ $K = 1 + R_2/R_1$ $T_a = R_4C$ $b = R_3/(R_3+R_4)$	
Correcteur P.D. ou à avance de phase	$R(p) = K[1 + T_{dp}/(1 + dT_{dp})]$ $K = 1 + R_2/R_1$ $T_d = R_4C$ $d = R_3/R_4$	
Correcteur P.I.D. série	$R(p) = K(1 + 1/T_{ip})[1 + T_{dp}/(1 + dT_{dp})]$ $K = 1 + R_2/R_1$ $T_i = R_3C_1$ $T_d = R_5C_2$ $d = R_4/R_5$	
Correcteur P.I.D. parallèle	$R(p) = K[1 + 1/T_{ip} + T_{dp}/(1 + dT_{dp})]$ $K = R_2/R_1$ $T_i = R_3C_1$ $T_d = R_5C_2$ $d = R_4/R_5$	

7.9. Correcteur PIR

Ce correcteur est intéressant lorsque le processus comporte un retard important.

En fait il peut être utilisé pour n'importe quel processus en faisant une identification la plus simple possible: on suppose que le processus se comporte comme un premier ordre retardé.

La tangente au point d'inflexion de la réponse indicielle permet de déterminer un retard important T .

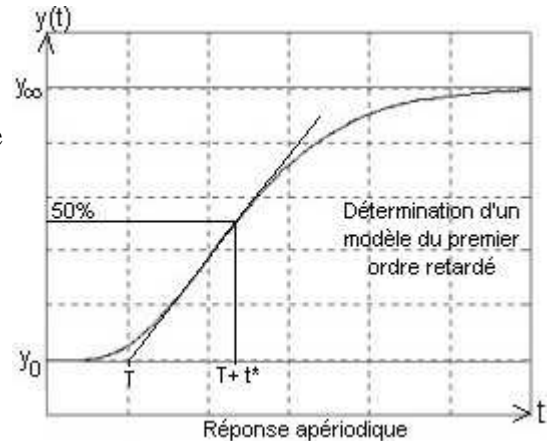
A 50% de la variation on mesure le temps $T+t^*$ et on en déduit la valeur de la constante de temps du modèle: $t = t^*/\ln 2$.

Tout système apériodique pourra donc être identifié par ce modèle simplifié (et bien sûr pas rigoureux):

$$T(p) = A \cdot e^{-Tp} / (1 + tp)$$

Le retard dans la boucle est très nocif, il diminue considérablement les performances de l'asservissement. En effet il apporte un retard de phase proportionnel à la pulsation et diminue fortement la marge de phase. Pour retrouver une marge de phase satisfaisante il faut diminuer fortement le gain de boucle, et par conséquent la précision et la vélocité deviennent médiocres.

Le principe du correcteur P.I.R. est de *rejeter l'effet du retard à l'extérieur de la boucle*.



Nous allons déterminer la fonction de transfert $R(p)$ de ce correcteur.

Nous supposons avoir identifié l'ensemble ampli-processus-capteur sous la forme d'un premier ordre retardé:

$$V_s / V = B \cdot e^{-Tp} / (1 + tp) = F(p) \cdot e^{-Tp} \quad \text{et} \quad R(p) = V/E$$

V est l'image de l'erreur corrigée.

Donc la fonction de transfert en boucle ouverte est: $T(p) = R(p) \cdot F(p) \cdot e^{-Tp}$.

En boucle fermée: $W(p) = V_s / V_e = [R \cdot F \cdot e^{-Tp}] / [1 + R \cdot F \cdot e^{-Tp}]$.

Dans le schéma équivalent le retard est rejeté à l'extérieur de la boucle et le correcteur P.I. de fonction de transfert $R'(p)$ corrige la boucle du premier ordre sans retard:

$$W(p) = V_s / V_e = [R' \cdot F / (1 + R' \cdot F)] \cdot e^{-Tp}$$

L'égalité des deux expressions de la fonction de transfert $W(p)$ donne:

$$R / (1 + R \cdot F \cdot e^{-Tp}) = R' / (1 + R' \cdot F) \quad \text{D'où} \quad R = R' / [1 + R' \cdot F (1 - e^{-Tp})]$$

$R'(p)$ correspond à la fonction de transfert d'un correcteur P.I.: $R'(p) = K(1 + T_i p) / T_i p$.

$F(p)$ correspond à la fonction de transfert d'un système du premier ordre: $F(p) = B / (1 + tp)$.

Réglage du correcteur P.I. de fonction de transfert $R'(p)$ dans la boucle équivalente où seul subsiste le système du premier ordre de fonction de transfert $F(p)$:

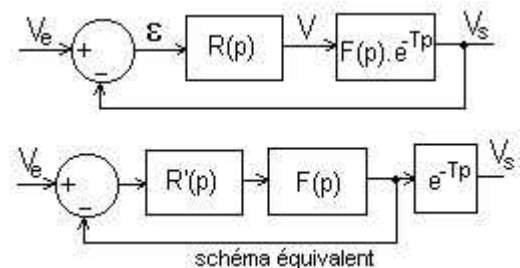
$$T(p) = K \cdot B (1 + T_i p) / [T_i p (1 + tp)]$$

Il est évident qu'il faut régler $T_i = t$ et de cette façon l'asservissement se comportera comme un intégrateur bouclé suivi d'un retard (voir schéma équivalent page précédente).

Si on pose $K = a/B$, la fonction de transfert de l'asservissement devient:

$$W(p) = e^{-Tp} / (1 + tp/a)$$

Alors qu'en boucle ouverte le processus est caractérisé par une constante de temps t importante et un



retard T , l'asservissement (de classe 1, donc avec une erreur de position nulle), se comporte comme un système du premier ordre retardé (même retard qu'en boucle ouverte), mais avec une constante de temps τ beaucoup plus faible (en pratique on peut régler α à 10 voire 15).

En réalité le processus n'étant pas vraiment un premier ordre avec retard, la réponse indiciale de l'asservissement présentera un dépassement, mais la vélocité de l'asservissement ainsi corrigé est spectaculaire (bien meilleure qu'avec un correcteur P.I.D.).

Malheureusement ceci n'est vrai que pour les variations de la consigne.

Vis-à-vis des perturbations, cette correction n'est pas bonne: seule la correction P.I. intervient alors. Et comme on a réglé $T_i = \tau$ le temps de réaction à une perturbation est grand (même temps de réponse qu'en boucle ouverte).

En conclusion, le correcteur P.I.R. donne des réponses excellentes à des variations de consigne mais n'est pas efficace en réponse aux perturbations. Il peut donc être choisi dans des applications où la consigne varie très souvent, mais où le processus est peu perturbé.

7.10. Modèle imposé (correcteur spécifique)

On en arrive à la correction spécifique pour obtenir des performances optimales. Cette technique nécessite la connaissance précise de la fonction de transfert en boucle ouverte de l'ensemble ampli-processus-captur. Soit $F(p)$ cette fonction de transfert.

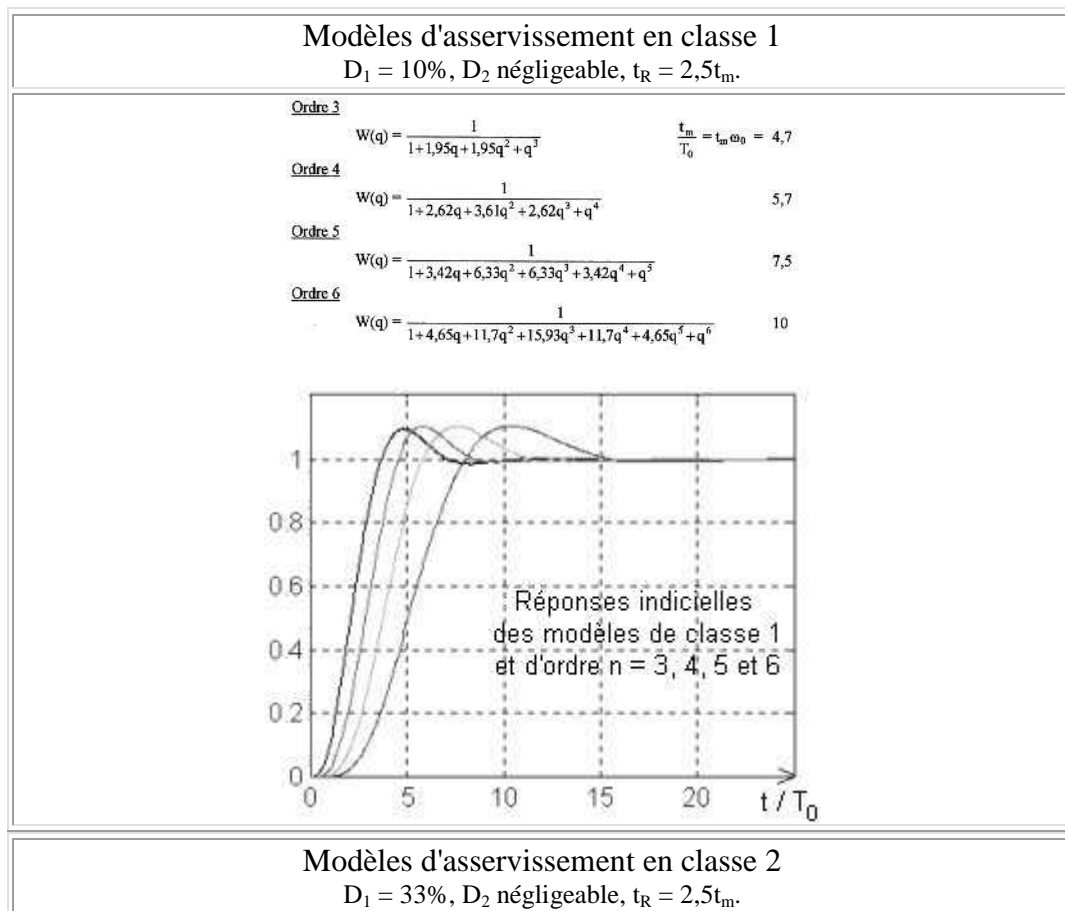
Grâce au critère de Naslin, nous avons pu obtenir des modèles de fonctions de transfert avec une qualité amortissement parfaite.

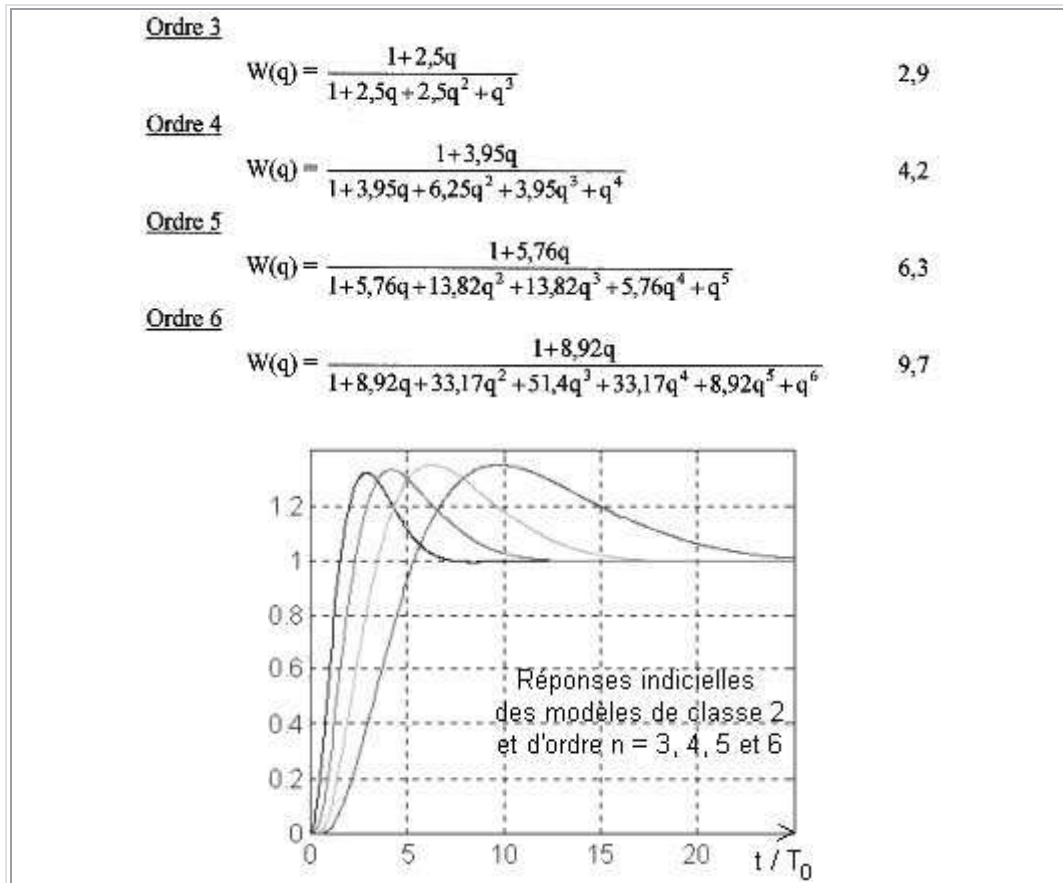
Les modèles sont donnés à la page suivante.

En classe 1 (erreur de position nulle) le dépassement de la réponse indicielle est de 10 %, le temps de réponse est égal à 2,5 fois le temps de montée. En classe 2 (erreurs de position et de traînage nulles), bien que le dépassement soit de 33%, il n'y a pas d'oscillation, le temps de réponse est aussi de 2,5 fois le temps de montée.

Le principe de cette correction est simple: Connaissant la fonction de transfert en boucle ouverte de l'ensemble ampli-processus-captur, il consiste à calculer la fonction de transfert d'un correcteur réalisable telle que l'asservissement en boucle fermée se comporte comme un modèle choisi (d'où le titre du paragraphe).

On choisit une variable symbolique réduite en posant $q = p/w_0 = T_0 p$.





Si F est la fonction de transfert en boucle ouverte de l'ensemble ampli-processus-captteur, et R la fonction de transfert du correcteur, en boucle fermée l'asservissement a une fonction de transfert : $W = R.F/(1 + R.F)$.

Si on impose W, on peut alors déterminer R: $R.F(1 - W) = W$ d'où:

$R = W/[F(1 - W)]$. En posant $F = n/d$ et $W = N/D$ on obtient:

$$R = N.d / [n(D - N)] .$$

La dernière question qui se pose est : quel modèle choisir ?.

Il faut choisir un modèle pour W de telle manière que le correcteur R *soit réalisable*.

Il faut donc que le degré du numérateur de R soit au plus égal à celui du dénominateur. La solution optimale est telle que numérateur et dénominateur de R aient le même degré.

$R = N.d / [n(D - N)]$ donc: degré de N + degré de d = degré de n + degré de D (puisque le degré de N est toujours très inférieur au degré de D) .

On en déduit : degré de D = degré de d - degré de n + degré de N .

Les degrés de n et de d sont connus (on connaît la fonction de transfert F). Le degré de N est déterminé en fonction de la classe d'asservissement qu'on souhaite réaliser : (degré de N) = 0 en classe 1 et = 1 en classe 2 (voir les modèles à la page précédente) .

Le degré de D correspond à l'ordre de la fonction de transfert W.

Enfin il reste à choisir le paramètre T_0 qui détermine la vitesse de l'asservissement corrigé. En pratique, il faut que ce choix aboutisse à un correcteur où chacun des coefficients qui apparaît au numérateur de la fonction de transfert R(q) ne dépasse pas 20 à 25. Chacun de ces coefficients est matérialisé par un gain dans la réalisation.

La marche à suivre est la suivante:

Après avoir choisi la classe de l'asservissement on en déduit l'ordre du modèle. Le choix du paramètre T_0 ne doit pas être utopique (un asservissement ne peut pas être 20 fois plus véloce que le processus en

boucle ouverte !).

On transforme alors $T(p)$ en $T(q)$ avec $p = q / T_0$.

Il est alors très facile de trouver la fonction de transfert $R(q)$.

Ce correcteur sera réalisé avec n intégrateurs ($1/q = 1/T_0p$), des gains et des sommateurs, selon l'un des deux montages vus au chapitre 5 (paragraphe 5.3), à partir de l'un des deux graphes canoniques.

Dans le schéma de réalisation, si le correcteur est de classe 1, un des intégrateurs ne sera pas bouclé, et s'il est de classe 2, deux des intégrateurs ne seront pas bouclés.

7.11. Correcteur PID programmé (équation de récurrence)

Dans ce dernier paragraphe nous allons aborder les équations de récurrence qui sont le point de départ de l'étude des systèmes échantillonnés.

Lorsqu'une fonction continue $v(t)$ est échantillonnée, on s'intéresse à sa valeur à des instants séparés par une période d'échantillonnage T_e : $v_{k-1} = v(t_{k-1})$ $v_k = v(t_k)$ et $T_e = t_k - t_{k-1}$.

La dérivée $dv(t)/dt$ à l'instant t_k est donc: $(dv/dt)_{t_k} = (v_k - v_{k-1}) / T_e$.

De même on peut exprimer la dérivée seconde:

$$(d^2v/dt^2)_{t_k} = [(dv/dt)_{t_k} - (dv/dt)_{t_{k-1}}] / T_e = [(v_k - v_{k-1}) / T_e - (v_{k-1} - v_{k-2}) / T_e] / T_e$$

$$(d^2v/dt^2)_{t_k} = (v_k - 2.v_{k-1} + v_{k-2}) / T_e^2.$$

Application au correcteur P.I.D. de type parallèle de fonction de transfert: $R(p) = K[1 + 1/T_i p + T_d p / (1 + T_d p / K_d)]$.

Cette fonction de transfert mise sous forme d'un rapport de deux polynômes est: $R(p) = (K + ap + bp^2) / (cp + dp^2)$ avec:

$$\text{relations (1): } a = K(T_i + T_d/K_d) \quad b = K.T_i.T_d(1 + 1/K_d) \quad c = T_i \quad d = T_i.T_d/K_d.$$

La fonction de transfert du correcteur est donc: $R(p) = V(p)/E(p) = (K + ap + bp^2) / (cp + dp^2)$.

On en déduit l'équation différentielle: $d.v'' + c.v' = K.e + a.e' + b.e''$

Remplaçons les dérivées par les relations vues au début du paragraphe:

$$d.(v_k - 2.v_{k-1} + v_{k-2}) / T_e^2 + c.(v_k - v_{k-1}) / T_e = K.e_k + a.(e_k - e_{k-1}) / T_e + b.(e_k - 2.e_{k-1} + e_{k-2}) / T_e^2$$

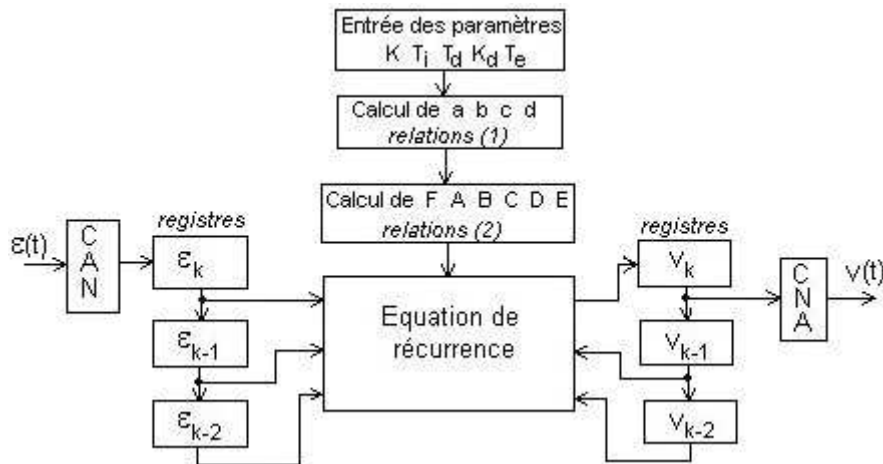
On en déduit l'équation de récurrence qui donne v_k en fonction des 2 valeurs antérieures de v et de e_k et des 2 valeurs antérieures de e :

$$v_k = A.v_{k-1} + B.v_{k-2} + C.e_k + D.e_{k-1} + E.e_{k-2} \quad \text{avec:}$$

$$\text{relations (2): } A = (2.d+c.T_e)/F \quad B = -d/F \quad C = (K.T_e^2+a.T_e+b)/F \quad D = -(a.T_e+2.b)/F \quad E = b/F$$

$$F = (d+cT_e).$$

La conception du correcteur P.I.D. programmé est donc la suivante:



Fin du cours