DC02 ALIMENTER LES SYSTÈMES EN REGIME SINUSOIDAL MONOPHASE

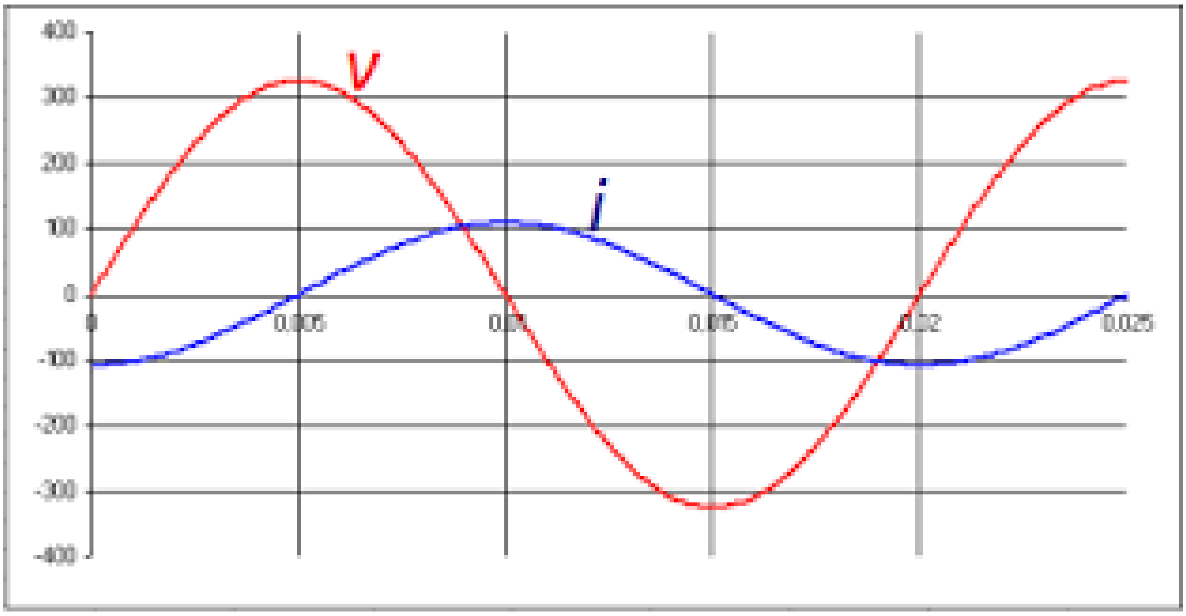


Table des matières

1 REGIME SINUSOIDAL MONOPHASE

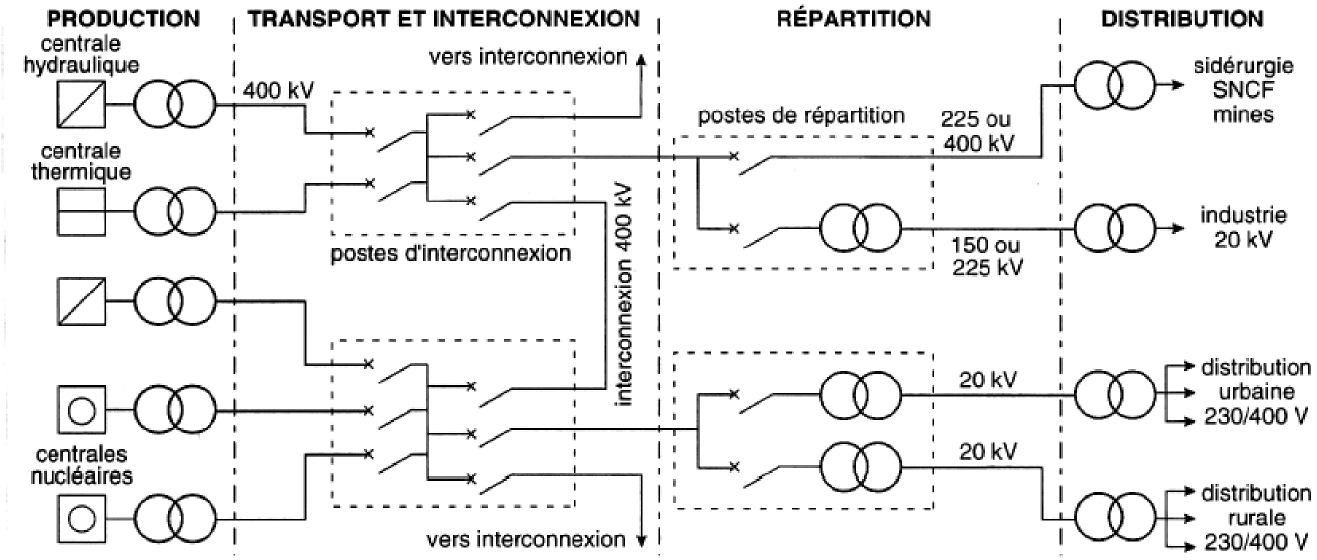
1.1 Distribution sinusoïdale d'énergie électrique

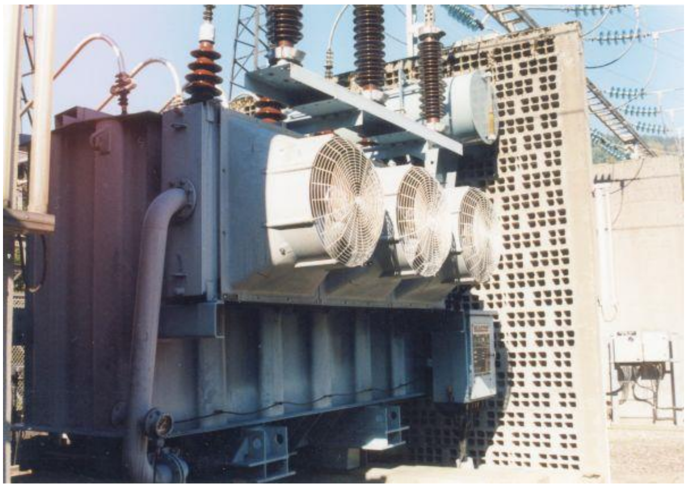
La fonction sinusoïdale joue un rôle de première importance en électricité pour les raisons suivantes :

- **La production d'énergie électrique se fait sous forme de tensions sinusoïdales** dans les alternateurs, ce qui permet une distribution facile et économique à l'aide de transformateurs. Les grandeurs relatives à ces réseaux sont donc sinusoïdales.
- Dans le cas d'un signal périodique de forme quelconque, on utilise son **développement en série de Fourier.** La fonction périodique est alors la somme d'un terme constant et de termes sinusoïdaux, ce qui permet de faire l'étude fréquentielle de chaque composante sinusoïdale de la série, sous forme complexe.
- De façon générale **l'analyse du signal** (électrique, acoustique, vibrations mécaniques...), **utilise les grandeurs sinusoïdales** et leurs compositions (somme, produit...).

D'autre part, l'utilisation de réseaux de distribution triphasés permet d'optimiser les dimensions des lignes de transport, et d'obtenir un couple moteur constant sur les machines tournantes alternatives.

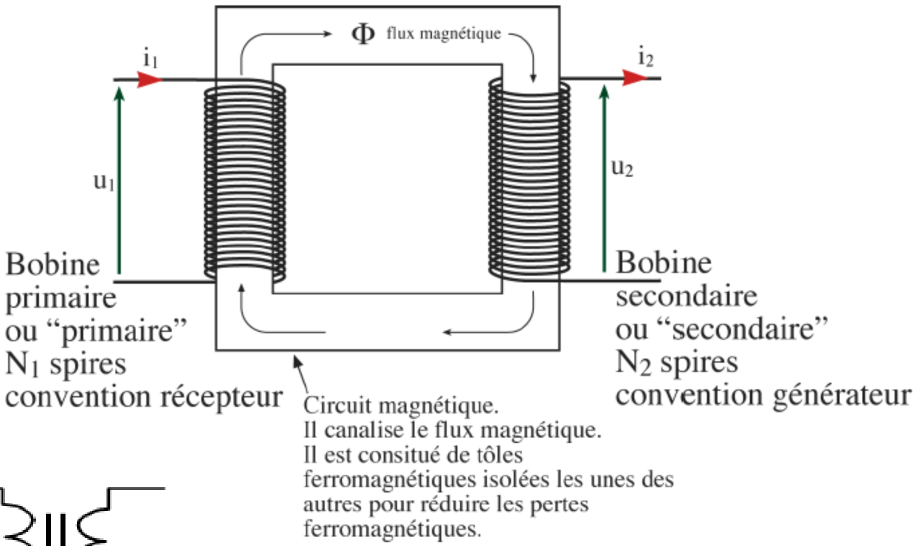
La **distribution** de l'énergie électrique, qu'elle soit domestique ou industrielle, se fait généralement sous tension faible ou moyenne (220V, 380V ou 25kV) pour des raisons de commodité d'emploi (puissance utile…) et de sécurité. En revanche, le **transport** se fait sous tension élevée (pour diminuer la valeur du courant de ligne et donc les pertes Joule dans les câbles). Pour cela, il est nécessaire, à l'entrée d'une usine ou d'un bâtiment habitable, de disposer d'une machine permettant d'adapter le niveau de la tension de distribution aux dispositifs qui vont utiliser l'énergie électrique. C'est le rôle **des transformateurs**. Ils sont conçus pour fonctionner à 50 Hz (les matériaux utilisés doivent avoir des pertes fer convenables à cette fréquence).



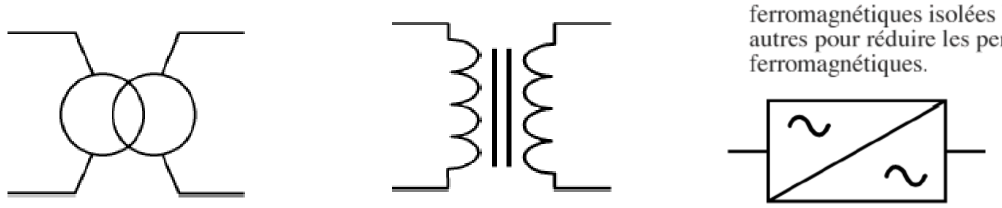


1.2 Transformateur monophasé parfait

Un transformateur monophasé est constitué d'un circuit magnétique fermé (réalisé avec des tôles isolées) sur lequel on monte deux enroulements concentriques (afin que le couplage soit le meilleur possible). Le premier enroulement (celui qui reçoit la tension à transformer) est appelé primaire alors que le second, aux bornes duquel on récupère le fruit de la transformation, est appelé secondaire.



symboles :



On obtient la relation générale : $\boxed{\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{I_1}{I_2} = m}$

Avec N_1 et N_2 le nombre de spires respectivement au primaire et secondaire

- Si $m < 1$, il s'agit d'un transformateur abaisseur de tension (alimentation des applications électroniques usuelles),
- Si $m > 1$, il s'agit d'un transformateur élévateur de tension (sortie d'alternateur vers les lignes hautes tension),
- Si $m = 1$, il s'agit d'un transformateur d'isolement *

(*) Un transformateur d'isolement est uniquement destiné à créer un isolement électrique entre plusieurs circuits pour des raisons de sécurité ou de résolution de problèmes techniques. Ces transformateurs sont très utilisés pour les appareils portatifs ou pour alimenter les parties de circuits de commande proche des opérateurs sur machine par exemple.

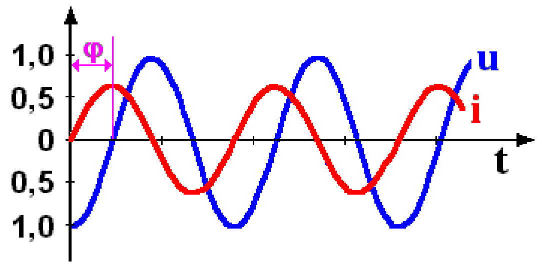
2 METHODES D'ÉTUDE DES CIRCUITS ÉLECTRIQUES

2.1 Dipôle passif

Soient les grandeurs instantanées aux bornes d'un dipôle avec $\omega t = \theta$, angle instantané.

La tension sinusoïdale $u(t) = U \cdot \sqrt{2}\, sin(\omega \cdot t)$

L'intensité du courant sinusoïdal $i(t) = I \cdot \sqrt{2}\, sin(\omega \cdot t - \varphi)$



2.2 Valeur moyenne

Par définition, valeur moyenne, notée $\overline{X}$ ou $< x(t) >$, d'un signal $x_{(t)}$: $X =< x_{(t)} >= \frac{1}{T}.\int_0^T x_{(t)}\,.dt$

Pour une grandeur sinusoidale :

2.3 Valeur efficace

Par définition, valeur efficace, notée X ou X_{eff} d'un signal $x_{(t)}$: $X = \sqrt{\frac{1}{T}.\int_0^T x^2{}_{(t)}\,.dt}$

notée RMS (Root Mean Square – Racine de la valeur moyenne du carré du signal-).

Pour une grandeur sinusoïdale :

2.4 Lois de Kirchoff

La loi des mailles, la loi des nœuds restent utilisables mais avec des grandeurs sinusoïdales, les calculs sont donc plus difficiles à réaliser.

Exemple 1 : Circuit avec R_1 et R_2 en série

Exemple 2 : Circuit RL

Exemple 3 : Circuit RC

On arrive à une équation différentielle avec des sinus donc la plupart du temps assez difficile à résoudre.

2.5 Passage en notation complexe

La solution pour faciliter les calculs est de passer par la notation complexe avec laquelle tous les théorèmes appris précédemment (Thevenin, Millman, Pont diviseur….) restent alors valables en sinusoidal et quel que soit le type de récepteur (résistance, inductance, condensateur…)

3 LES NOMBRES COMPLEXES

3.1 Définitions et écritures

En mathématique, les nombres complexes ont été créés pour résoudre les équations du type $x^2 = a$ avec $a < 0$ en introduisant un nouveau nombre, i tel que $i^2 = -1$.
En électricité, c'est **la lettre j** qui est utilisée afin d'éviter la confusion avec l'intensité du courant électrique.

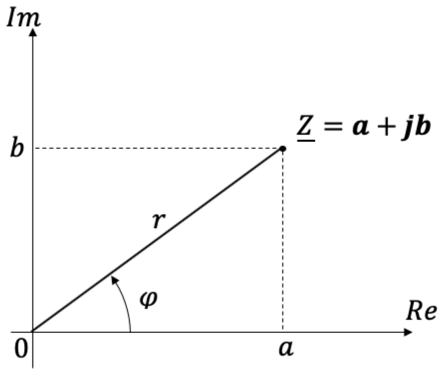
Soit le nombre complexe $\underline{Z}$ écrit sous forme cartésienne : $\underline{Z} = \mathbf{a} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{jb}$

On appelle :
- a sa partie réelle, soit $a = \mathrm{Re}\,[\,Z\,]$ — si $a = 0$, $\underline{Z}$ est un imaginaire pur,
- b sa partie imaginaire, soit $b = \mathrm{Im}\,[\,Z\,]$ — si $b = 0$, $\underline{Z}$ est un réel pur.

Pour la représentation géométrique des nombres complexes, on définit un plan complexe tel que :

- L'abscisse représente l'axe réel noté Re, soit pour le complexe $\underline{Z}$, sa partie réelle $a = \mathrm{Re}\,[\,Z\,]$
- L'ordonnée représente l'axe imaginaire noté Im, soit pour $\underline{Z}$ sa partie imaginaire $b = \mathrm{Im}\,[\,Z\,]$

Représentation géométrique de $\underline{Z} = \mathbf{a} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{b}$ dans le plan complexe



On observe que

$$a = r \cdot cos(\varphi)$$
$$b = r \cdot sin(\varphi)$$

Forme trigonométrique

$$\underline{Z} = a + i \cdot b = r \cdot cos(\varphi) + j \cdot r \cdot sin(\varphi)$$
$$\underline{\mathbf{Z}} = \mathbf{r} \cdot (\boldsymbol{cos}(\varphi) + \mathbf{j} \cdot \boldsymbol{sin}(\varphi))$$

Cette forme est également notée forme polaire

Avec
$r = |\underline{\mathbf{Z}}|$, appelé module de $\underline{Z}$, tel que $\mathbf{r} = \sqrt{\mathbf{a^2} + \mathbf{b^2}}$
$\varphi = \mathrm{Arg}(\underline{\mathbf{Z}})$, appelé phase ou argument de $\underline{Z}$, tel que $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{tan}^{-1}(\mathbf{b}/\mathbf{a})$

On écrit ce même complexe sous la forme exponentielle en utilisant la formule d'Euler :

$$\underline{\mathbf{Z}} = \mathbf{r} \cdot (\boldsymbol{cos}(\varphi) + \boldsymbol{j} \cdot \mathbf{sin}(\varphi)) = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\varphi}}$$

3.2 Représentation dans le plan de Fresnel

Soient les grandeurs instantanées aux bornes d'un dipôle avec $\omega t = \varphi$, angle instantané.
La tension sinusoïdale $u(t) = U \cdot \sqrt{2}\, sin(\omega \cdot t)$
L'intensité du courant sinusoïdal $i(t) = I \cdot \sqrt{2}\, sin(\omega \cdot t - \varphi)$

Dans un réseau linéaire en régime sinusoïdal établi, tous les courants et tensions varient avec la même pulsation ω, et seules les valeurs efficaces (U et I ici) sont significatives pour les grandeurs énergétiques (puissances). La tension $v(t)$ est prise à l'origine des phases.

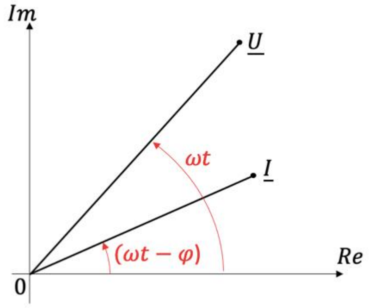
Plan complexe :
À la tension $v(t)$ on associe la grandeur complexe $\underline{U}$, telle que $\underline{U} = U\sqrt{2}\, e^{j\omega t}$
À l'intensité $i(t)$ on associe la grandeur complexe $\underline{I}$, telle que $\underline{I} = I\sqrt{2}\, e^{j(\omega t - \varphi)}$

Loi d'Ohm complexe (généralisée) : $\underline{U} = \underline{Z} * \underline{I}$ avec $\underline{Z}$ *impédance du dipôle*

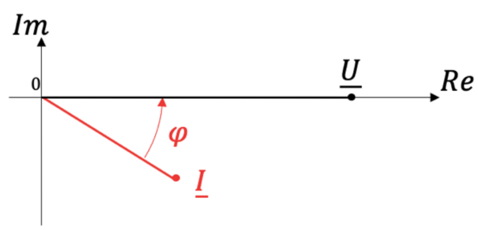
Plan de Fresnel : En choisissant un plan complexe particulier qui tourne à la vitesse ω, et en privilégiant la valeur efficace (grandeur énergétique) sur la valeur maximale (grandeur de forme)

À la tension $v(t)$ on associe la grandeur complexe $\underline{U}$, telle que $\underline{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{U}$
À l'intensité $i(t)$ on associe la grandeur complexe $\underline{I}$, telle que $\underline{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{I}\, \boldsymbol{e}^{j(-\varphi)}$

Plan complexe

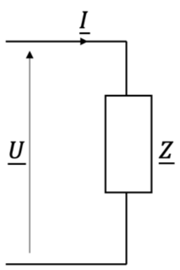


Plan de Fresnel



Remarque :
Dans le plan complexe, les angles sont repérés de l'origine vers la grandeur complexe
Dans le plan de Fresnel, on observe que l'angle de $\underline{I}$ est reperé du complexe $\underline{I}$ vers l'origine $\underline{U}$
C'est un choix historique des électriciens, qui affecte à la grandeur $\underline{I}$ un angle qui n'est pas le sien… mais celui de la charge.

Justification :
Soit une charge quelconque notée $\underline{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{jX} = \boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{j\varphi}}$
avec $r = \sqrt{R^2 + Z^2}$ et $\varphi = \tan^{-1}({X}/{R})$



La loi d'Ohm complexe donne la relation : $\underline{\boldsymbol{U}} = \underline{\boldsymbol{Z}} \cdot \underline{\boldsymbol{I}}$

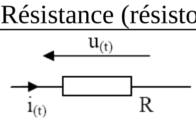
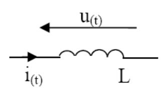
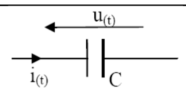
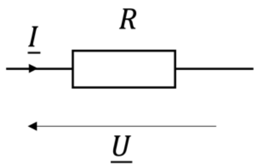
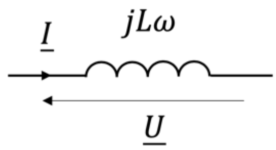
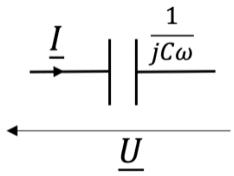
Soit $\underline{\boldsymbol{I}} = \frac{\underline{\boldsymbol{U}}}{\underline{\boldsymbol{Z}}} = \frac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\varphi}}} = \frac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{Z}} \cdot \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j\varphi}} = \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j\varphi}}$

On remarque que l'angle φ, défini comme argument de la charge, peut servir à exprimer l'angle de l'intensité du courant $\underline{\boldsymbol{I}}$ à condition de lui affecter un signe –

On dit qu'une charge dont l'argument est positif (charge inductive) appelle un courant en retard sur la tension d'un angle φ. L'argument de $\underline{\boldsymbol{I}}$ est négatif, mais la représentation dans le plan de Fresnel est un angle positif, φ, argument de la charge en le signant de $\underline{\boldsymbol{U}}$ vers $\underline{\boldsymbol{I}}$.

3.3 Impédance

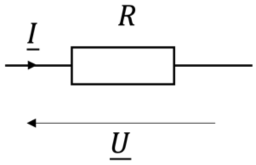
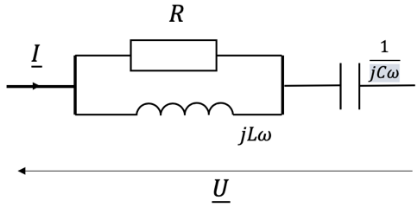
Les phénomènes électriques sont ramenés essentiellement à trois comportements :

Comportement	Résistif (Effet Joules)	Inductif (électromagnétisme)	Capacitif (Electrostatique)
Symbole	Résistance (résistor)	Inductance	Condensateur
temporel			
	$u_{(t)} = R \cdot i_{(t)}$	$u_{(t)} = L \cdot \frac{di}{dt}$	$i_{(t)} = C \cdot \frac{du}{dt}$
alternatif	$\underline{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{R} \cdot \underline{\boldsymbol{I}}$	$\underline{\boldsymbol{U}} = \underline{\boldsymbol{Z_L}} * \underline{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \underline{\boldsymbol{I}}$	$\underline{\boldsymbol{U}} = \underline{\boldsymbol{Z_C}} * \underline{\boldsymbol{I}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{\omega}} \cdot \underline{\boldsymbol{I}}$
			
P Puissance active	$P = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}$	0	0
Q Puissance réactive	0	$Q_L = L \cdot \omega \cdot I^2$	$Q_c = - \cdot C \cdot \omega \cdot U^2$

Soit une charge quelconque notée $\underline{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{jX} = \boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{j\varphi}}$

Suivant sa nature, la charge $\underline{\boldsymbol{Z}}$ peut être représentée par un des termes, ou par une combinaison de deux ou trois termes.

Exemples :

Radiateur de chauffage		Charge purement résistive $\underline{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{R}$	
Plaque à induction		Circuit R,L,C $\underline{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{R} \;//\; \boldsymbol{jL\omega} + \dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{jC\omega}}$ $\underline{\boldsymbol{Z}} = \dfrac{\boldsymbol{jRL\omega}}{\boldsymbol{R} + \boldsymbol{jL\omega}} + \dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{jC\omega}}$	

Les règles d'association en série ou parallèle sont valables à partir du moment où on travaille en notation complexe.

3.4 Exercices de cours

Pour les montages des figures 1 et 2 alimentés par le réseau EDF 230V 50Hz :

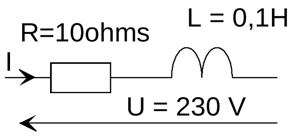


Fig. 1

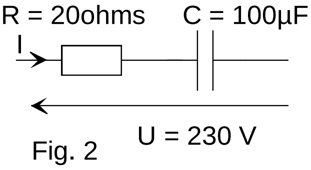


Fig. 2

La tension U est prise à l'origine des phases

a) Exprimer l'impédance complexe équivalente $\underline{Zeq}$ du montage sous forme littérale cartésienne, puis faire les applications numériques. Donner ensuite le module et l'argument (forme polaire).

b) Faire la même chose pour le courant $\underline{I}$.

c) Représenter $\underline{U}$ et $\underline{I}$ dans le plan complexe.

d) Représenter u(t) et i(t)

Pour le montage de la figure 3 alimenté par le réseau 230V 50Hz, rechercher sous forme littérale cartésienne et polaire, puis faire les applications numériques pour :

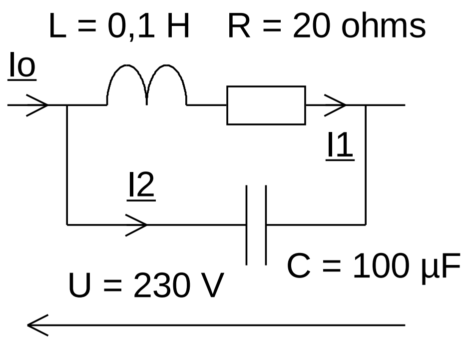


Fig.3

a) L'impédance complexe équivalente $\underline{Z}_{eq}$ du montage.
b) Les courants $\underline{I1}$, $\underline{I2}$, $\underline{Io}$.
c) Représenter $\underline{U}$ et $\underline{I1}$, $\underline{I2}$, $\underline{Io}$. dans le plan complexe.

4 ÉNERGIE ET PUISSANCES ÉLECTRIQUES

4.1 Définitions

4.1.1 Puissance instantanée $p_{(t)}$

La puissance instantanée est le produit de deux grandeurs duales appelées **variable potentiel** (VP) et **variable flux** (VF).

$$p_{(t)} = u_{(t)}.i_{(t)}$$

$u_{(t)}$ est la Variable « Potentiel » et se mesure à partir d'un potentiel de référence.
$i_{(t)}$ la Variable « Flux » et se mesure en insérant un ampèremètre dans le circuit électrique
Unité W (Watt)
Symbole : P

Le flux caractérise le déplacement de la grandeur représentative des charges électriques tandis que le potentiel caractérise son stockage.

4.1.2 Puissance active P

Par définition, la puissance active P (dans un comportement périodique de période T) est la valeur moyenne de la puissance instantanée.

$$\mathrm{P} =< p_{(t)} >= \frac{1}{T}.\int_0^T p_{(t)}\,.dt$$

4.1.3 Energie $w_{(t)}$

Par définition

$$dw = p_{(t)}.dt$$

$p_{(t)}$ puissance instantanée
symbole de l'énergie W (pour Work)
unité J (Joules)
autres unités: kWh, Ah

Exemples :

Si $p_{(t)} = P$ =constante (par exemple la puissance délivrée par une batterie) $\quad W = P.t$

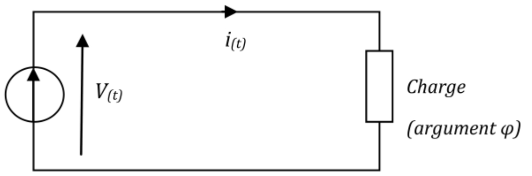
Si $p_{(t)}$ est une fonction du temps, l'énergie entre les instants t_1 et t_2 est $\quad W = \int_{t_1}^{t_2} p_{(t)}.dt$

4.2 Puissances en alternatif monophasé

4.2.1 Puissance instantanée $p_{(t)}$

Soit un système d'alimentation monophasé $u(t)$, connecté sur une charge d'argument φ qui appelle un courant $i(t)$

Tension sinusoïdale	$u(t) = U\sqrt{2}\,sin(\omega t)$
Intensité du courant sinusoïdal	$i(t) = I\sqrt{2}\,sin(t-\varphi)$
Puissance instantanée	$\boldsymbol{p_{(t)} = u(t).i(t)}$

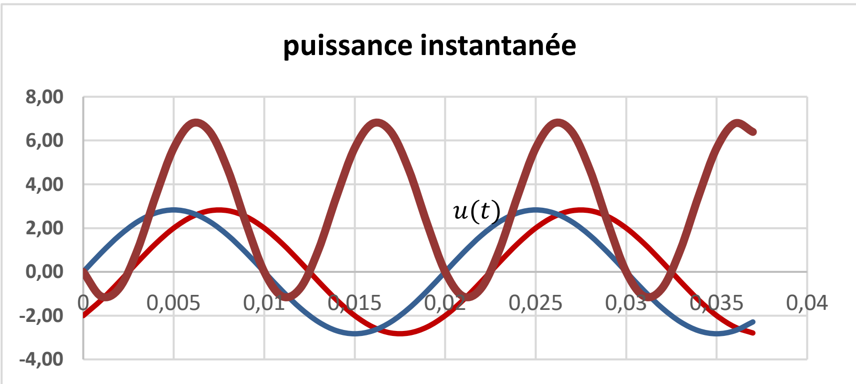


$$p_{(t)} = u(t).i(t) = U\sqrt{2}\,sin(\omega t)\,I\sqrt{2}\,sin(t-\varphi) = 2UI(sin(\omega t)\,sin(\omega t-\varphi))$$

$$p_{(t)} = 2UI\,(\frac{1}{2}(cos(\omega t-\omega t+\varphi)+\ cos(\omega t+\omega t-\varphi))) = UI(\cos\varphi+\cos(2\omega t-\varphi))$$

$$\boldsymbol{p_{(t)} = UI\cos\varphi + UI\cos(2\omega t-\varphi)}$$

puissance instantanée en régime sinusoïdal



La puissance instantanée fournie par un système d'alimentation monophasé est la somme : $\boldsymbol{p(t)}$

- d'une puissance constante, $\boldsymbol{UI\cos\varphi}$
- **d'une puissance fluctuante** de fréquence double de la fréquence d'alimentation $\boldsymbol{UI\cos(2\omega t-\varphi)}$

$i(t)$

4.2.2 Puissance active P

(P valeur moyenne de la puissance instantanée, la valeur moyenne sur une période de $\cos(2\omega t - \varphi)$ étant nulle)

Puissance active $\mathbf{P} = \boldsymbol{UI\cos\varphi}$

Avec **U et I les valeurs efficaces** des grandeurs $u(t)$ et $i(t)$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{\varphi}$ argument de la charge

La puissance active est une puissance de dimensionnement des charges électriques, image de la transformation effective de l'énergie.

4.2.3 Puissance réactive Q

Par extension de la puissance active, on pose la définition de la puissance réactive :

$$\textbf{puissance réactive } \mathbf{Q} = \boldsymbol{UI\sin\varphi}$$

La puissance réactive est une puissance de dimensionnement des échanges d'énergie entre les éléments réactifs (L et C) et les alternateurs, échanges d'énergie à valeur moyenne nulle sur une période du signal.
Cette puissance n'a donc pas d'effet énergétique utile, par contre elle augmente le courant dans les conducteurs de ligne, on cherche à réduire son effet par compensation (compensation de l'énergie réactive).

4.2.4 Puissance apparente S

Par définition :

$$\textbf{puissance apparente } \boldsymbol{S} = \sqrt{\boldsymbol{P^2 + Q^2}}$$

La puissance apparente complexe est une puissance de dimensionnement des composants des réseaux électriques (alternateurs, transformateurs).

4.2.5 Facteur de puissance F_p

Le facteur de puissance qualifie le bon usage d'un réseau en comparant puissance utilisable et puissance de dimensionnement.

$$\textbf{Facteur de puissance. } \boldsymbol{F_p = \frac{P_t}{S_t}}$$

Dans le cas particulier d'un régime sinusoïdal pur, on trouve $F_p = \cos\varphi$

4.3 Bilan