Calcul vectoriel

Tout ce qu'il faut pour faire de la mécanique !

F. BLASCHECK

UNE VISION D'AVENIR DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE
Lycée Eiffel DIJON

Calcul vectoriel

1. Grandeurs physiques vectorielles en mécanique du solide
2. Vecteurs dans l'espace euclidien de dimension 3 (E)
3. Produit scalaire de 2 vecteurs
4. Produits vectoriel de 2 vecteurs
5. Changement de base : rotation
6. Exercices de cours

F. BLASCHECK

UNE VISION D'AVENIR DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE
Lycée Eiffel DIJON

1. Grandeurs physiques vectorielles en mécanique du solide

Les grandeurs physiques utilisées en mécanique du solide sont très souvent des vecteurs :

- **position** d'un point dans l'espace ; $\overrightarrow{OM}$
- **vitesse** d'un point par rapport à un référentiel ; $\overrightarrow{V}(M, S/R)$
- **accélération** d'un point par rapport à un référentiel ; $\overrightarrow{a}(M, S/R)$
- **force et moment** appliquée sur un solide ; $\overrightarrow{F}$ **et** $\overrightarrow{M}(A, \overrightarrow{F})$

2. Vecteurs dans (E)

Définition 1: vecteur

Un vecteur et un objet **reliant 2 points A et B de l'espace**. Il est définit par :

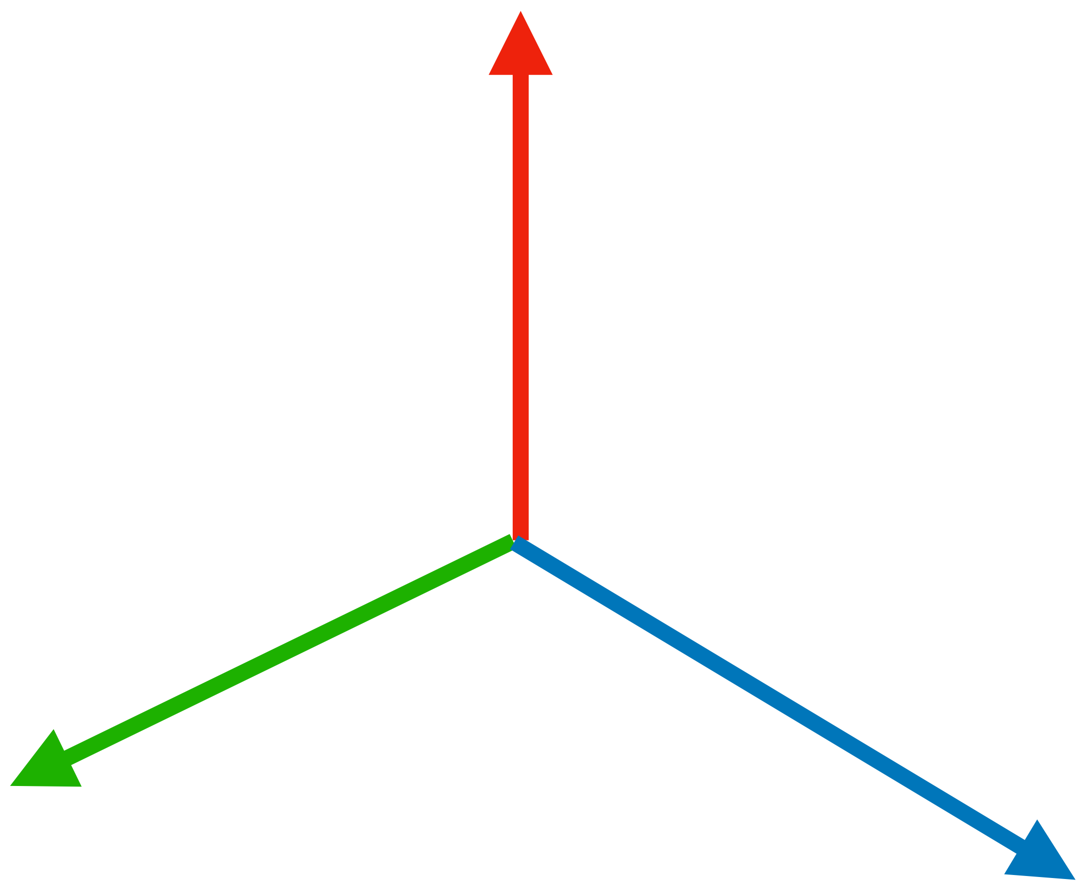
- **une direction** qui est la droite passant par A et B ;
- **un sens** qui est de A vers B ou de B vers A ;
- **une norme** qui est la longueur du segment $[AB]$.

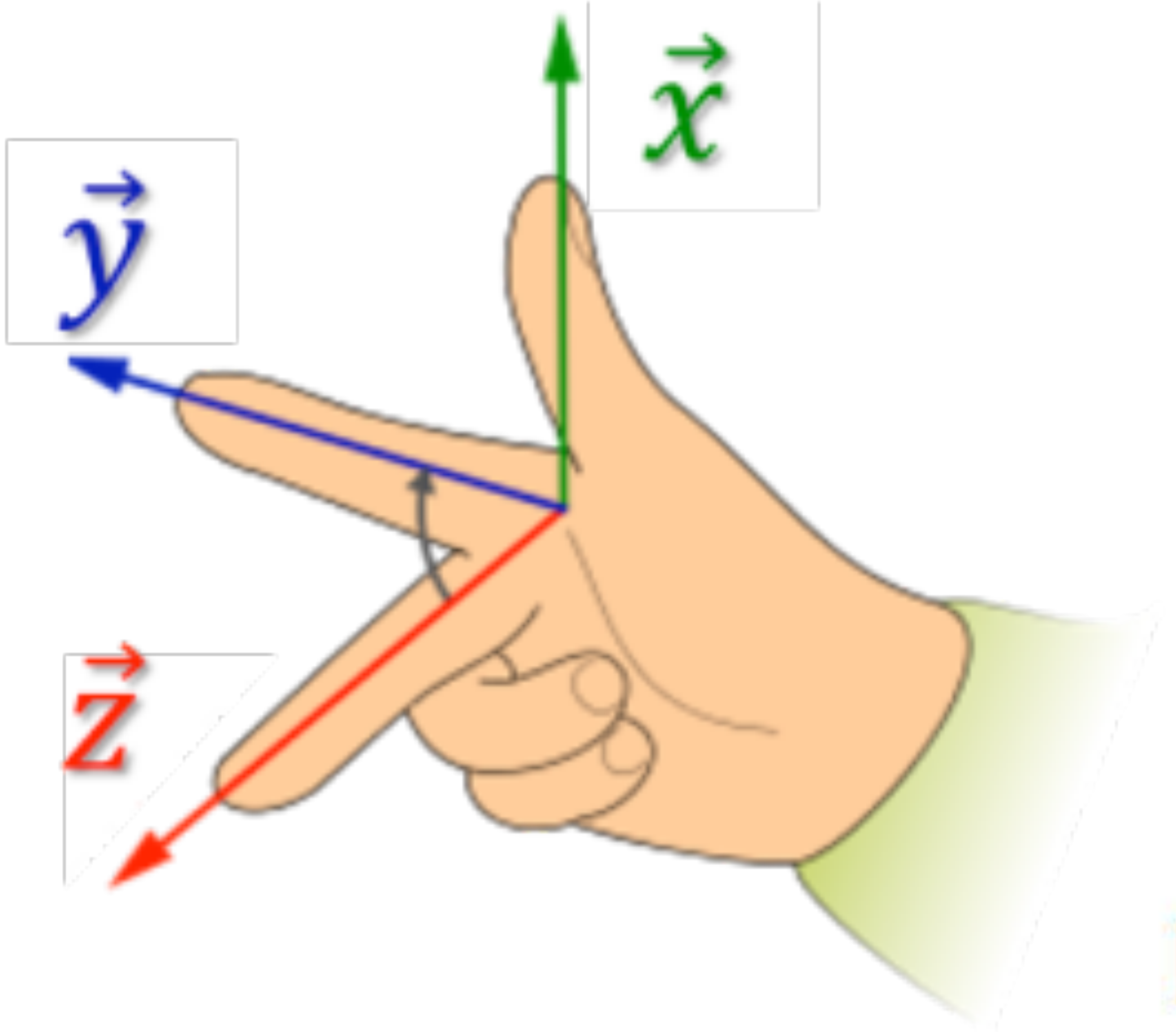
2. Vecteurs dans (E)

Définition 2 : base orthonormée directe (BOND)

Une base orthonormée directe BOND $B = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \vec{z})$ de (E) est un **triplet direct** de vecteurs **unitaires**, **orthogonaux 2 à 2 :**

- **triplet direct** : respectant la règles des 3 doigts de la main droite ;
- **unitaire : de norme égale à 1.**





2. Vecteurs dans (E)

Définition 3 : coordonnées d'un vecteur

Tout vecteur de (E) peut s'écrire en fonction des 3 vecteurs d'une BOND $B = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \vec{z})$ sous la forme :

$$\overrightarrow{AB} = x\,.\,\overrightarrow{x} + y\,.\,\overrightarrow{y} + z\,.\,\vec{z}$$

Les **scalaires** x, y et z sont appelées les **coordonnées du vecteurs** $\overrightarrow{AB}$ dans la base $B = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \vec{z})$.

En ligne **En colonne**

F. BLASCHECK

2. Vecteurs dans (E)

Définition 4 : norme d'un vecteur

La norme d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ de (E) est la longueur du segment $[AB]$, elle peut être calculée à partir des coordonnées du vecteur dans $B = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \vec{z})$:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

3. Produit scalaire

Définition 5 : produit scalaire

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ définis par leur coordonnées dans une base $B = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \vec{z})$:

$$\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{bmatrix} \text{ et } \overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{bmatrix}$$

Le produit scalaire de 2 vecteurs une application de $(E)^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = x_u . x_v + y_u . y_v + z_u . z_v$$

3. Produit scalaire

Propriétés :

- $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{u}$;
- $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$;
- $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$ si et seulement si les **2 vecteurs sont orthogonaux** ou si l'un des deux ou les deux sont nul ;
- $\overrightarrow{u} \bullet (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w}$

3. Produit scalaire

<u>Application géométrique : projection orthogonale</u>

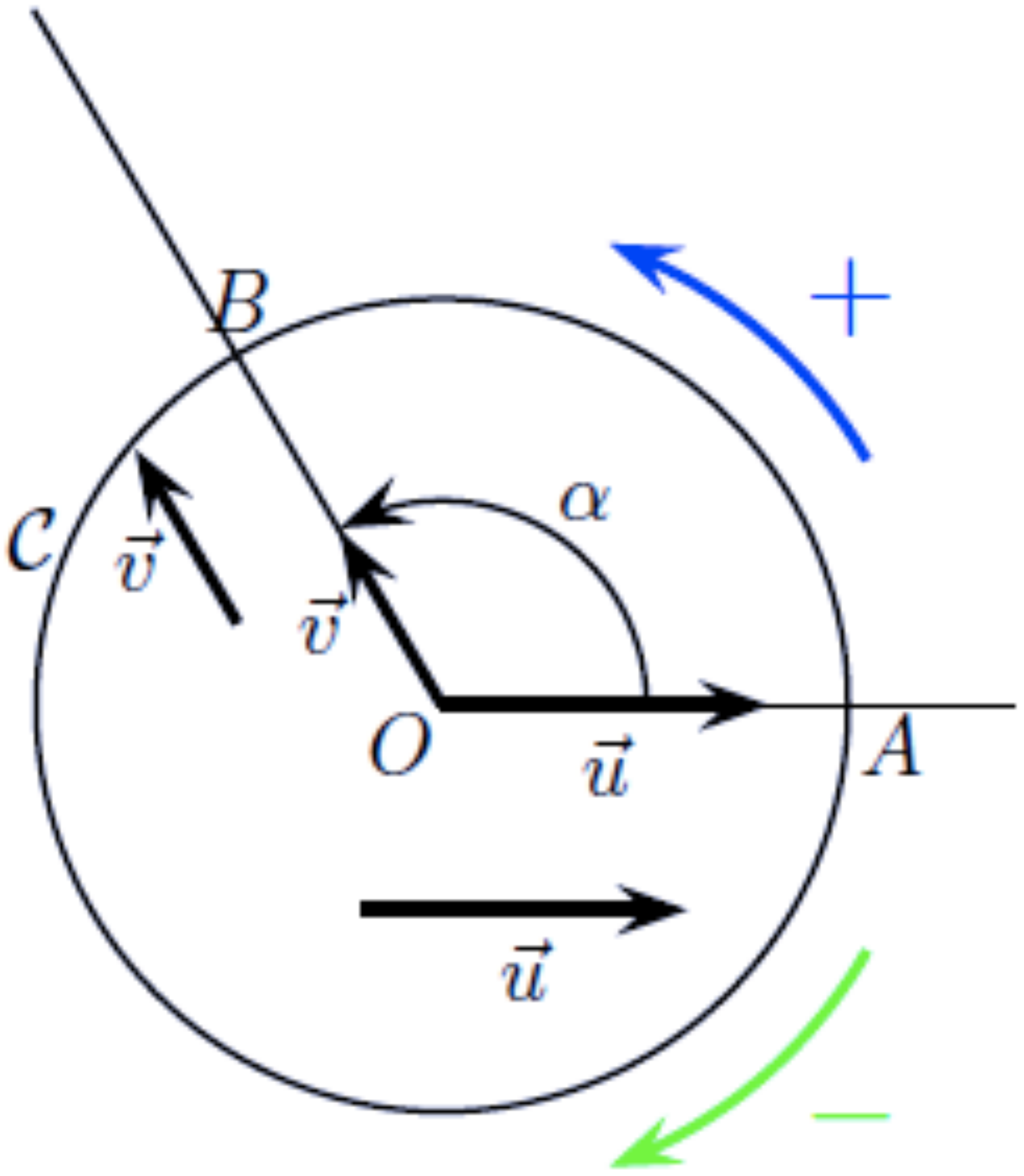
3. Produit scalaire

Définition 8 : produit scalaire (bis)

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de (E). On définit l'angle orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$, appelé $\alpha = (\vec{u}, \vec{v})$:

Le produit scalaire de 2 vecteurs est définit comme :

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.cos(\alpha)$$



4. Produit vectoriel

Définition 7 : produit vectoriel

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ définis par leur coordonnées dans une base $B = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$:

$$\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{bmatrix} \text{ et } \overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{bmatrix}$$

Le produit vectoriel de 2 vecteurs est une application de $(E)^2$ dans (E) définit par :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w} \text{ tel que } \overrightarrow{w} = \begin{bmatrix} y_u \cdot z_v - z_u \cdot y_v \\ z_u \cdot x_v - x_u \cdot z_v \\ x_u \cdot y_v - y_u \cdot x_v \end{bmatrix}$$

4. Produit vectoriel

Mise en oeuvre :

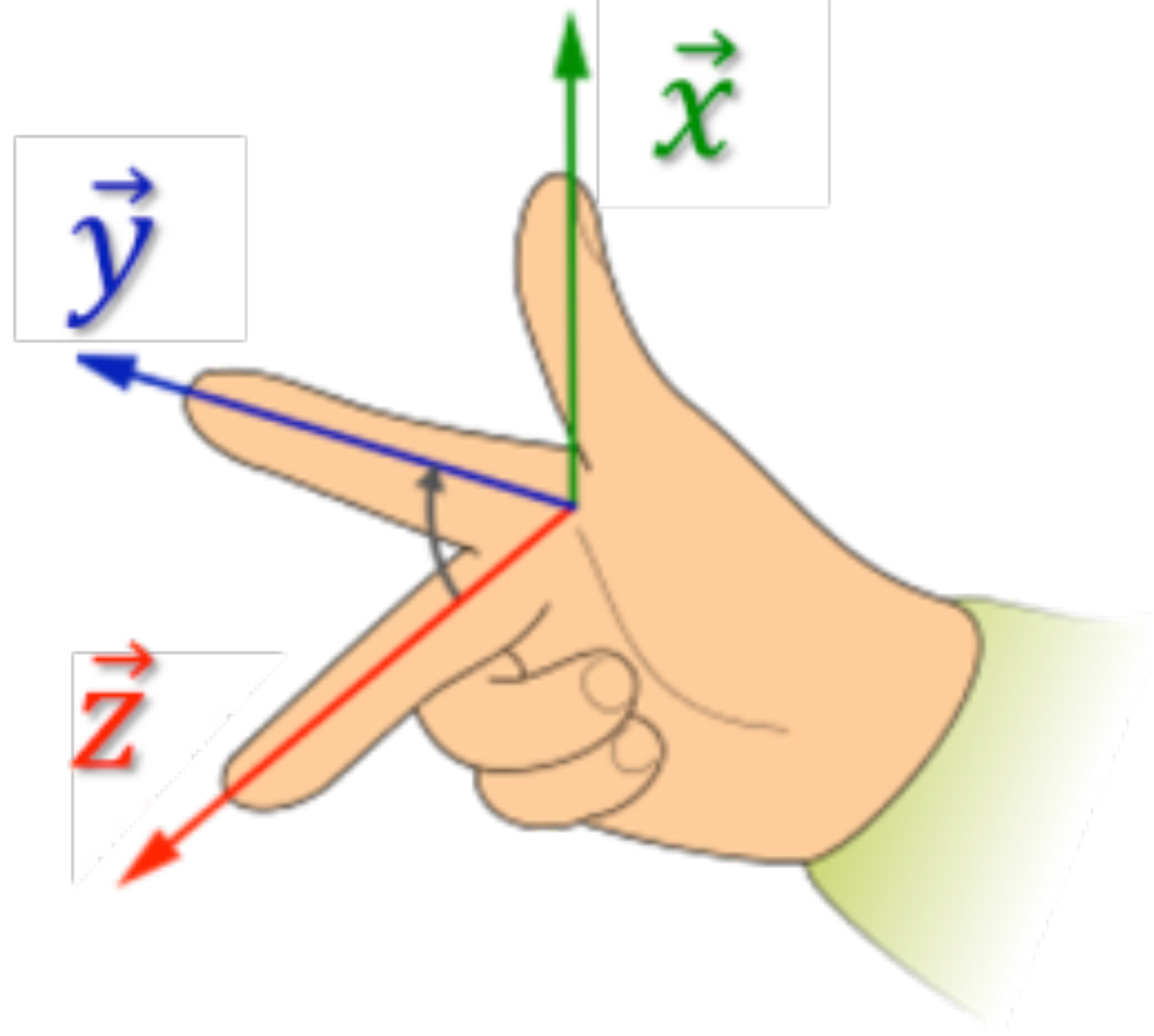
4. Produit vectoriel

Propriétés :

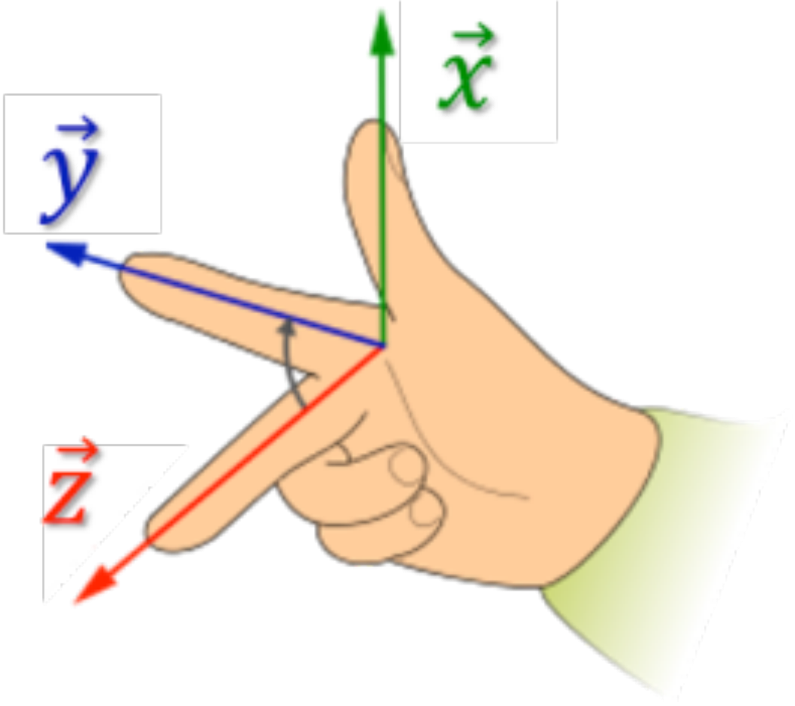
- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$;
- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u} = 0;$
- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si les **2 vecteurs sont colinéaires** ou si l'un des deux ou les deux sont nul ;
- $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}$
- $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est **orthogonal à la fois à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$**

4. Produit vectoriel

Représentation géométrique :



4. Produit vectoriel



Définition 9 : produit vectoriel (bis)

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de (E). On définit l'angle orienté entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, appelé $\alpha = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$:

Le produit vectoriel de 2 vecteurs est définit comme :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|. sin(\alpha) . \overrightarrow{n}$$

$\overrightarrow{n}$ est le vecteur unitaire normal au plan formé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et respectant la règle des doigts de la main droite.

5. Changement de base : rotation

Soit $B_1 = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ une base orthonormée directe de (E). On définit une deuxième base $B_2 = (\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ obtenue **par la rotation de la base B_1 d'un angle α autour de $\vec{z}_1$:**

$\alpha = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2})$ **angle orienté**

5. Changement de base : rotation

<u>**Application géométrique : produit scalaire**</u>

5. Changement de base : rotation

Application géométrique : produit scalaire

5. Changement de base : rotation

Application géométrique : produit vectoriel

5. Changement de base : rotation

Application géométrique : produit vectoriel

6. Exercices de cours

Exercice 1:

Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_3, calculer les composantes du vecteur $\vec{x}$ tel que $2(\vec{x} + \vec{a}) = 8\vec{a} - (\vec{b} + \vec{x})$, sachant que :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

6. Exercices de cours

Exercice 2:

Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_3, on donne les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Former le vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} + 2\vec{a} = \vec{b} - 2\vec{c}$.

b) Calculer le vecteur $\vec{w}$ tel que $6\left(\vec{c} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{w}\right) + 2\vec{b} = \vec{0}$.

c) Déterminer le vecteur $\vec{t}$ tel que :

$$2\vec{t} - \vec{a} = \frac{3}{2}\left(2\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{t}\right) + \frac{2}{3}\vec{b}.$$

6. Exercices de cours

Exercice 3:

On donne les points $A(5\,;2\,;-3)$, $B(8\,;0\,;5)$, $C(-2\,;-4\,;-1)$ et $D(4\,;-6\,;3)$. Calculer les composantes des vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{BD}$

c) $\overrightarrow{CA}$

d) $\vec{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

e) $\vec{v} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$

f) $\vec{w} = 4\overrightarrow{AC} - 3(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC})$

6. Exercices de cours

Exercice 4:

Calculer la distance qui sépare les points $A(1\,;6\,;3)$ et $B(7\,;-2\,;3)$.

Exercice 5:

Calculer le périmètre du triangle ABC si $A(2\,;1\,;3)$, $B(4\,;3\,;4)$ et $C(2\,;6\,;-9)$.

Exercice 6:

Déterminer le vecteur $\vec{b}$ unitaire, qui est colinéaire et de sens opposé à $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

6. Exercices de cours

Exercice 7:

Indiquer dans chacun des cas si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires :

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

f) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

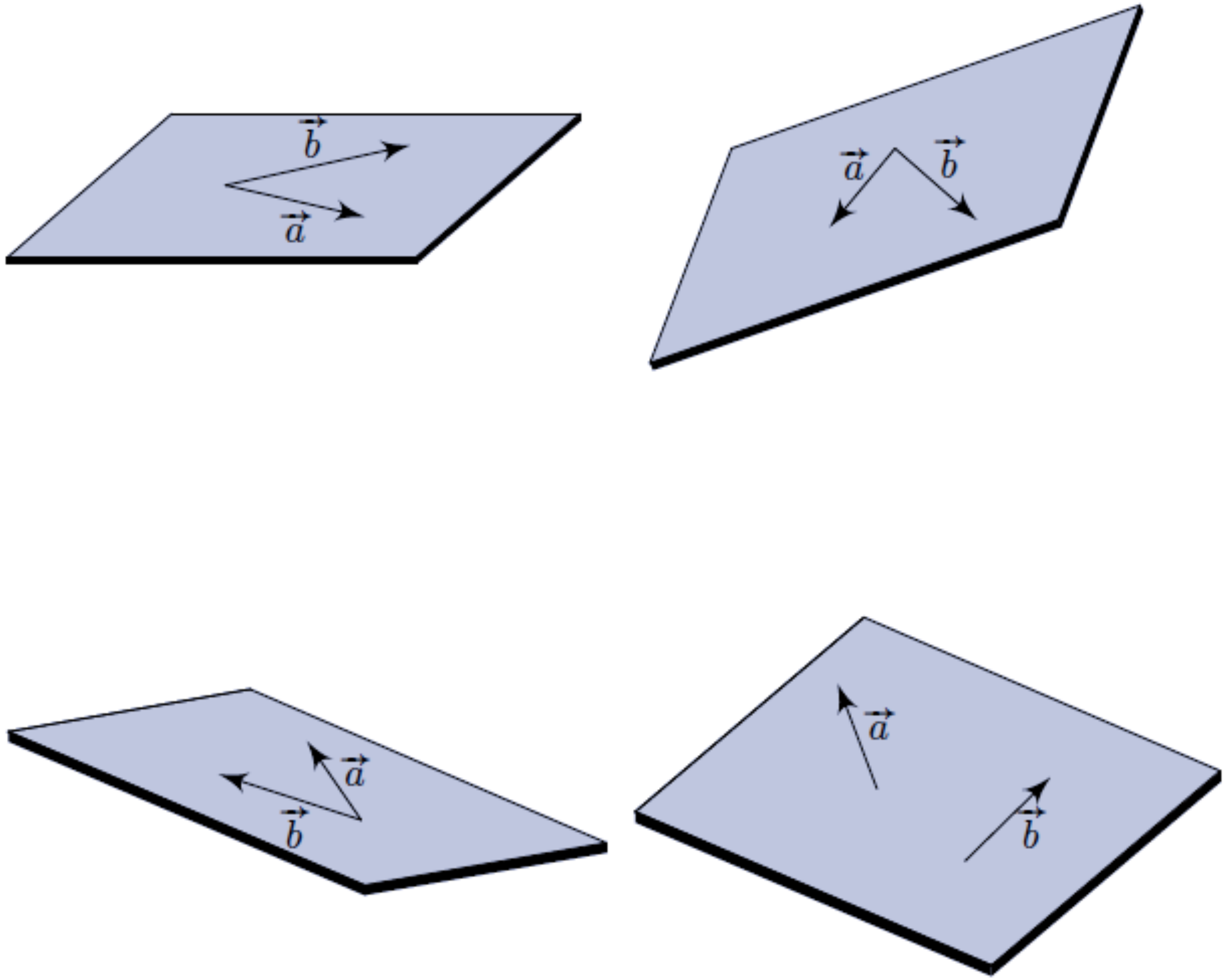
g) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

h) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$

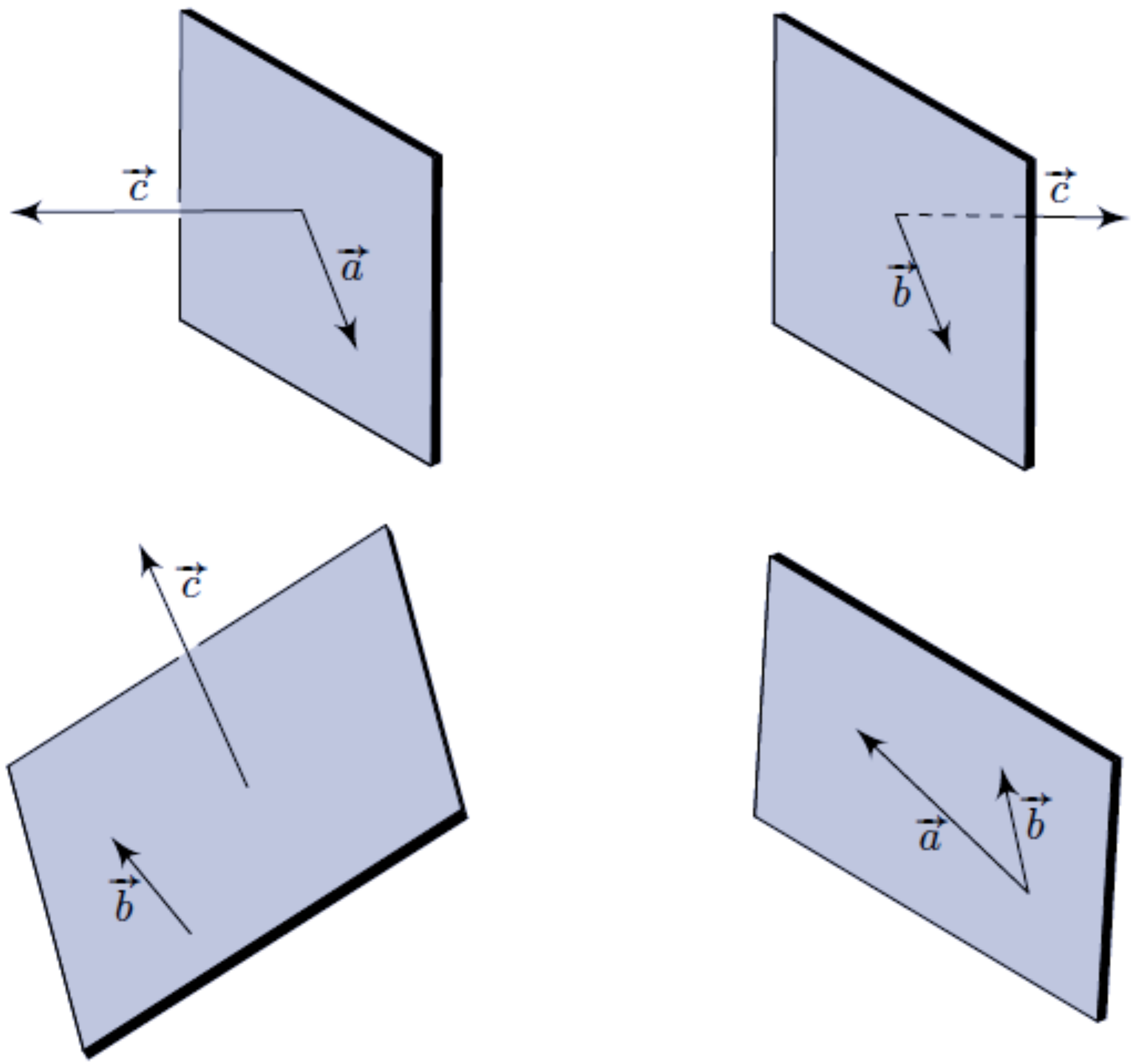
6. Exercices de cours

Exercice 8:

Représenter le vecteur $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$



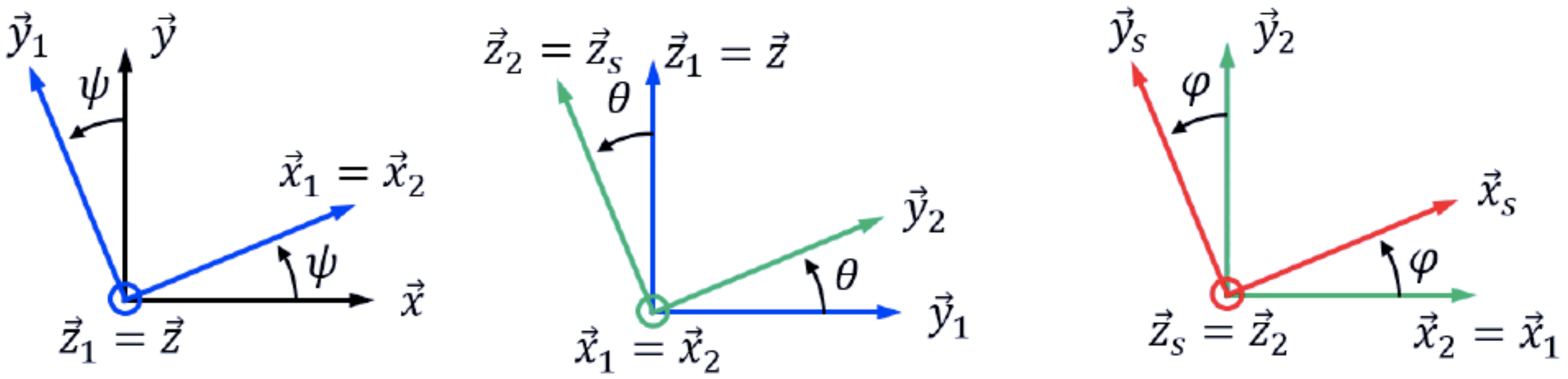
Représenter le vecteur manquant tel que $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$



6. Exercices de cours

Exercice 9:

Les figures planes ci-dessous représentent les angles d'Euler.



Exprimer le vecteur $\vec{x}$ dans la base $(\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$

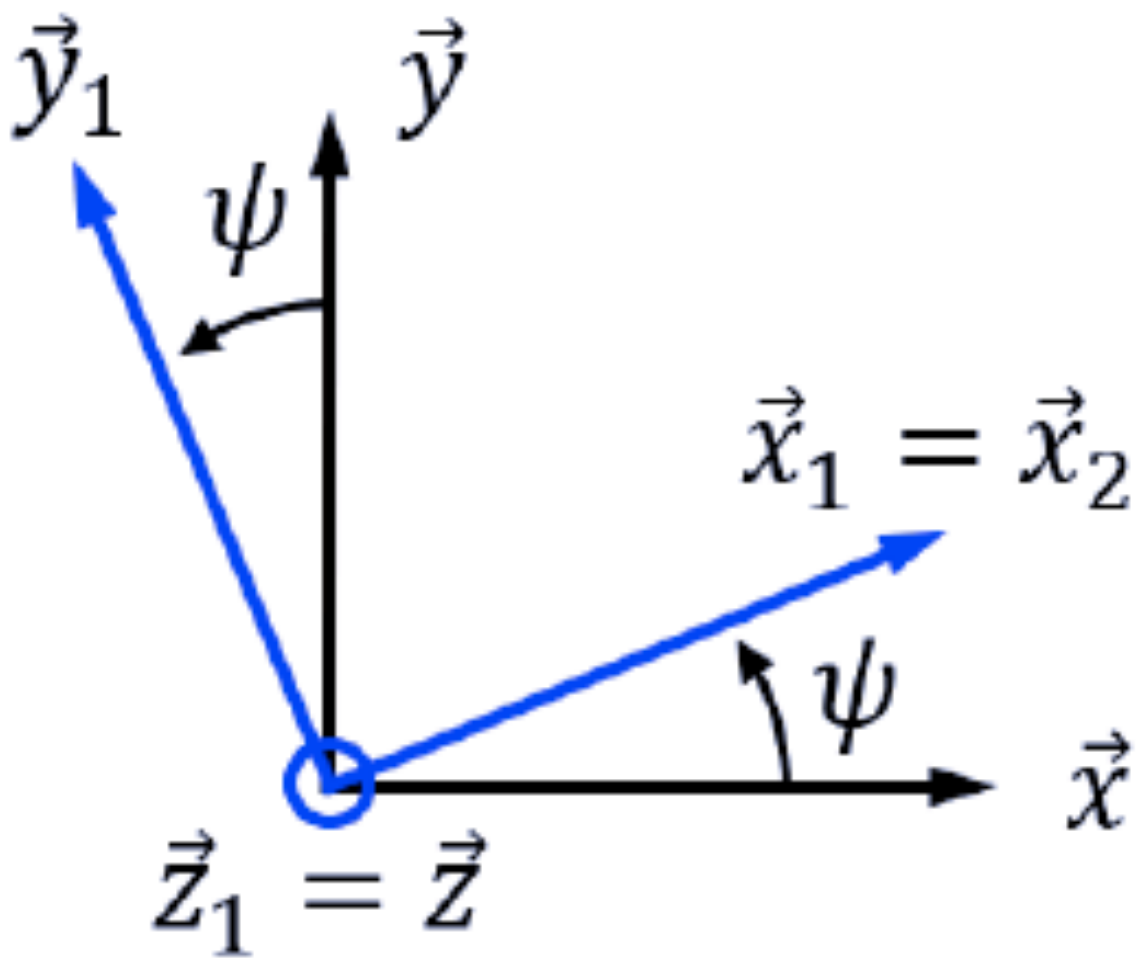
Exprimer le vecteur $\vec{y_1}$ dans la base $(\vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$

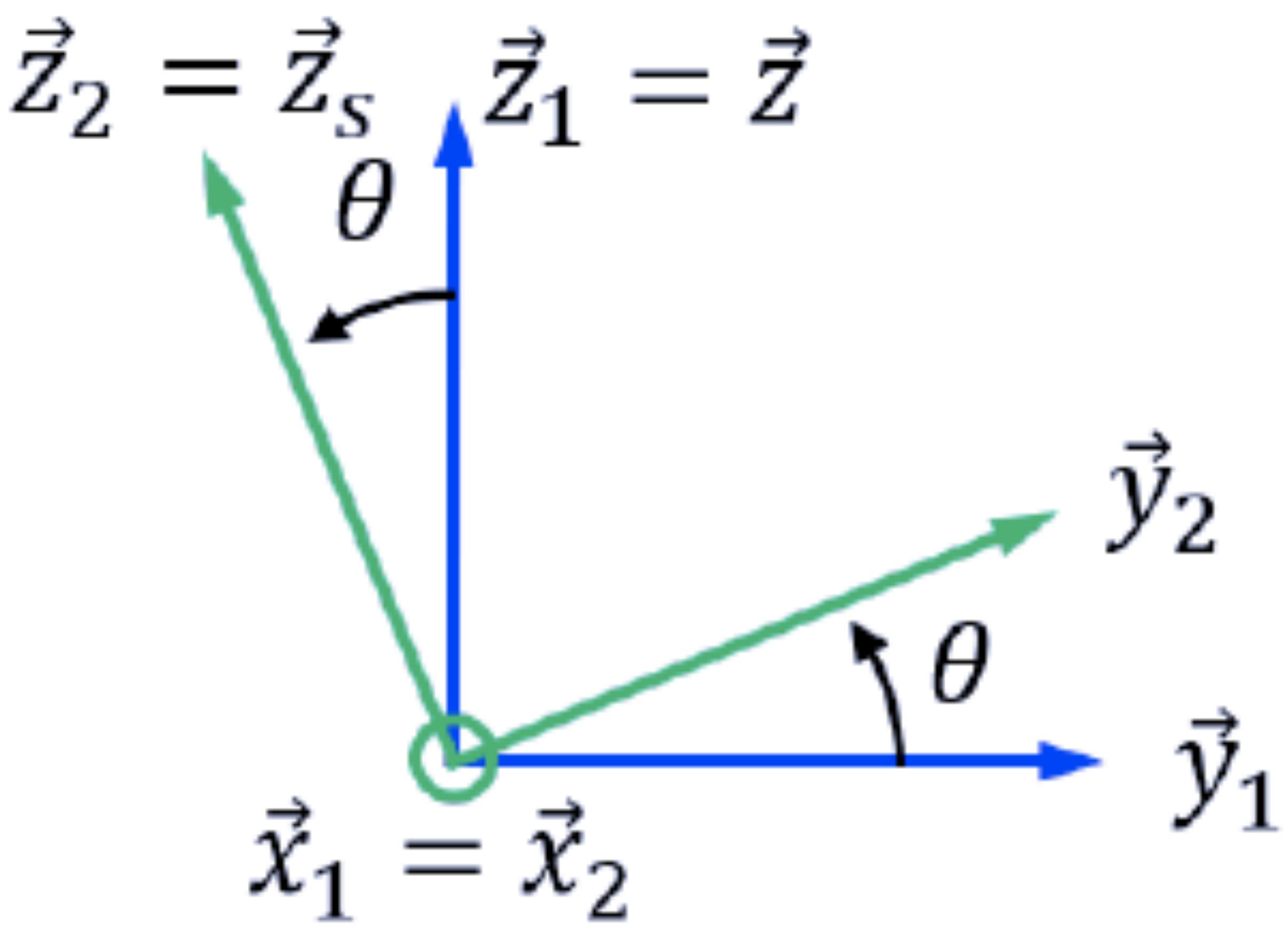
Exprimer le vecteur $\vec{x_2}$ dans la base $(\vec{x_s}, \vec{y_s}, \vec{z_s})$

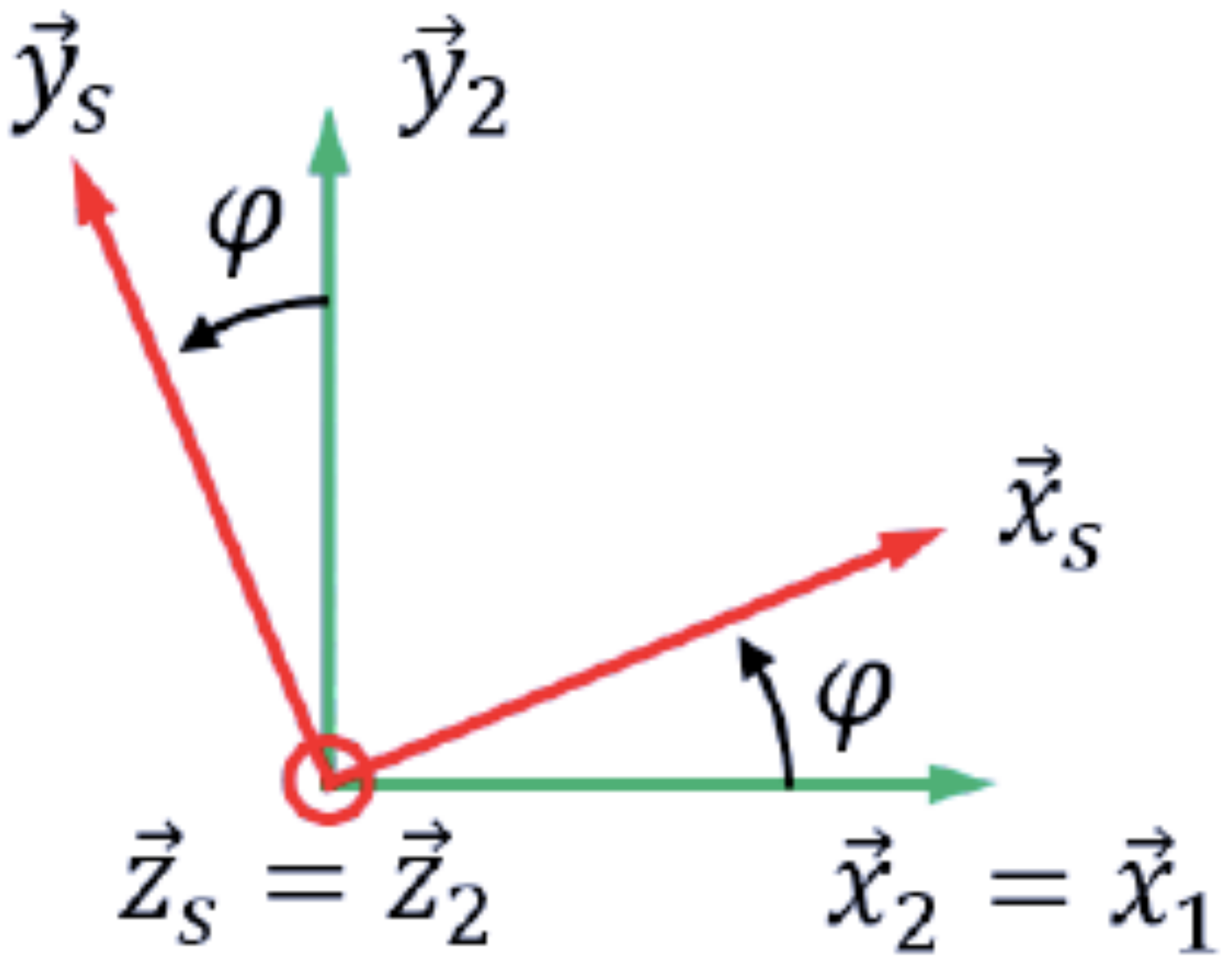
6. Exercices de cours

Exercice 10:

Les figures planes ci-dessous représentent les angles d'Euler.







Calculer :

- $\vec{x}_1 \wedge \vec{z}_1$
- $\vec{y}_1 \wedge \vec{x}_1$
- $\vec{x} \wedge \vec{z}_1$
- $\vec{x}_1 \wedge \vec{x}$

Calculer :

- $\vec{z}_2 \wedge \vec{y}_1$
- $\vec{y}_1 \bullet \vec{y}_2$
- $\vec{x}_1 \wedge \vec{y}_2$
- $\vec{y}_2 \wedge \vec{z}_1$

Calculer :

- $\vec{x}_1 \bullet \vec{y}_2$
- $\vec{y} \wedge \vec{y}_1$
- $\vec{y} \wedge \vec{x}_2$
- $\vec{x}_1 \bullet \vec{x}_s$

Calculer :

- $\vec{y}_s \wedge \vec{x}_1$
- $\vec{y}_s \bullet \vec{x}_1$
- $\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_s$
- $\vec{z}_1 \wedge \vec{y}_2$

Calculer :

- $\vec{x}_2 \bullet \vec{y}_2$
- $\vec{z}_1 \wedge \vec{z}_s$
- $\vec{x}_1 \wedge \vec{x}$
- $\vec{y}_2 \bullet \vec{x}_s$