

Cinématique des solides

Chapitre 1 : position d'un solide dans l'espace

F. BLASCHECK

Chapitre 1 : position d'un solide dans l'espace

1. Contexte
2. Solide, systèmes de solides
3. Repère lié au solide
4. Position d'un point dans un mécanisme
5. Position d'un solide dans un mécanisme
6. Application : chaîne fermée de solides

1. Contexte

L'étude mécanique des systèmes impose de définir **rigoureusement la position des solides.**

Par exemple, l'Ingénieur devra être capable de déterminer **la position, la vitesse et même l'accélération** de tous les points d'un avion en vol.

Dans le domaine de la robotique, l'Ingénieur doit pouvoir contrôler la **position, la vitesse et l'accélération de l'organe terminal d'un robot.**



2. Solides, systèmes de solides

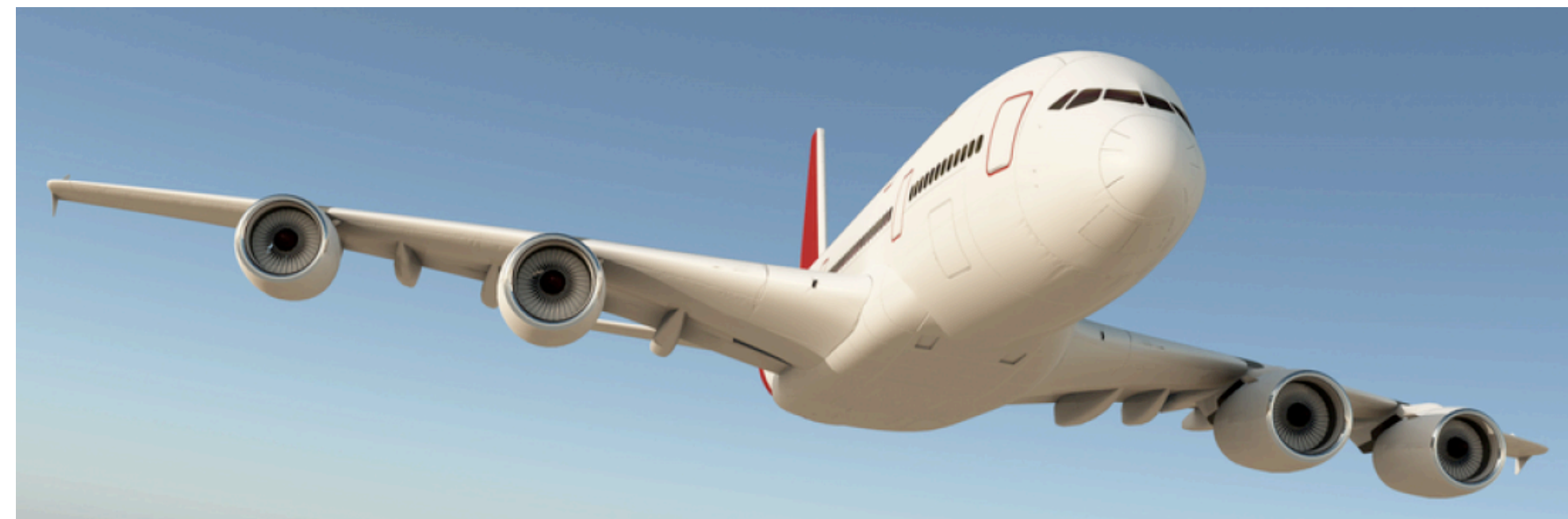
Dans ce cours, nous considérerons que **la chaîne de puissance d'un système pluri-technologique** est constitué d'un ensemble de solides **indéformables**.

Définition 1 : solide indéformable

Un solide, noté (S) , est indéformable si la distance entre 2 points fixes quelconques sur le solide est constante au cours de temps.

Soient A et B , 2 point de (S) . (S) est indéformable si :

$$\|\vec{AB}\| = cste$$



2. Solides, systèmes de solides

Cependant, la plupart des systèmes que nous étudierons ne sont pas constitué d'un seul solide mais d'**un ensemble de solides**.

Ces ensembles de solides sont appelés des **mécanismes**.

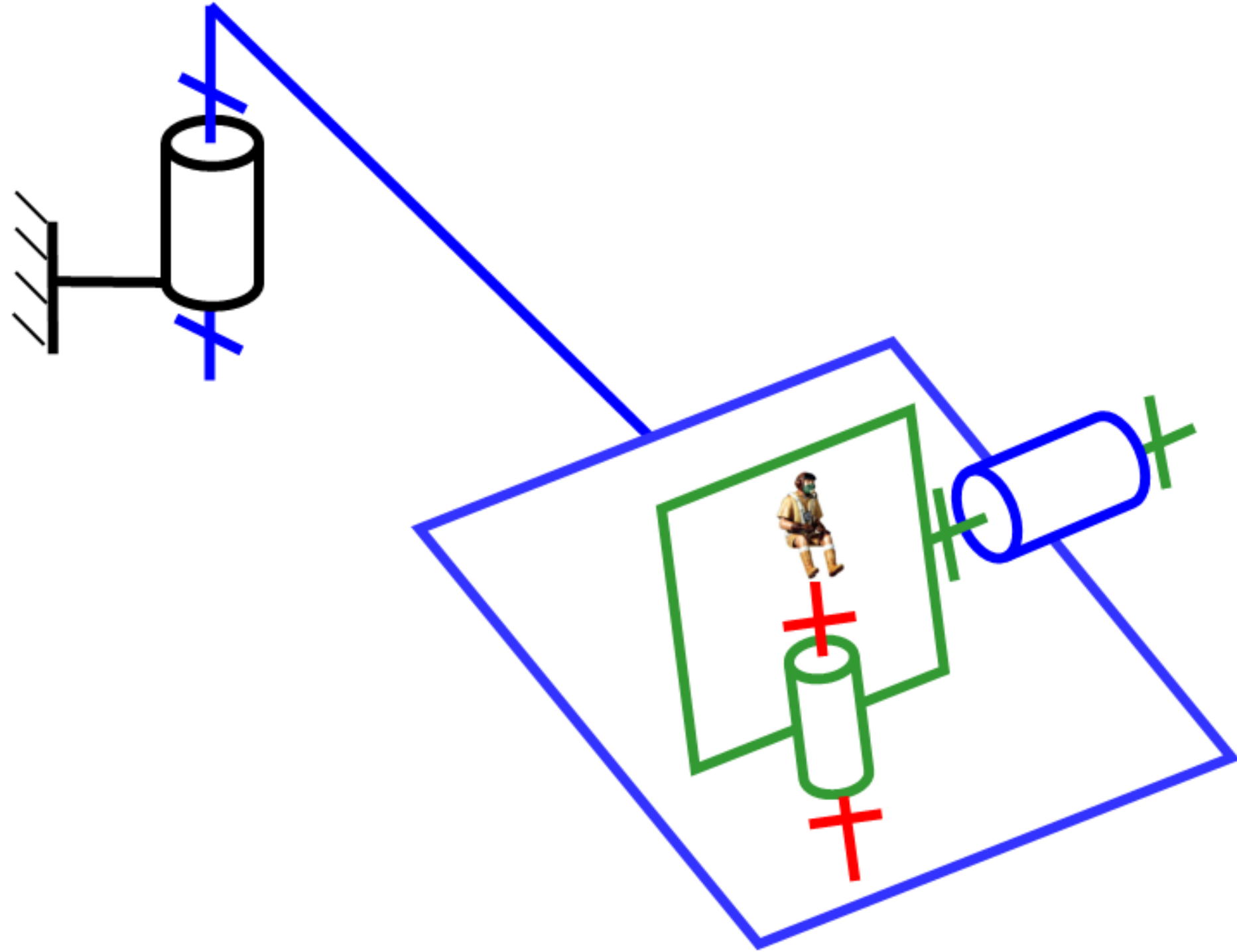
Définition 2 : systèmes de solides (mécanisme)

Un système de solides, noté (E) , est un ensemble de n solides indéformables, notés (S_i) , liés les uns aux autres par l liaisons normalisées.

Le solide fixe, s'il existe, par rapport au sol terrestre est appelé le bâti.

2. Solides, systèmes de solides

Exemple : entraînement des pilotes de chasse



3. Repère lié au solide

Les solides étudiés étant supposés indéformables, les position des points appartenant au solide sont fixes les unes par rapport aux autres.

On peut donc définir un **repère, constitué d'une origine et d'une base orthonormée de vecteurs** permettant de définir la position de tous les points du solides.

Définition 3 : repère lié à un solide

Pour tout solide indéformable (S_i) , on définit un repère lié au solide, noté $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$, permettant de définir la position de tous les points sur un solide :

O_i est un point quelconque du solide appelé l'origine ;

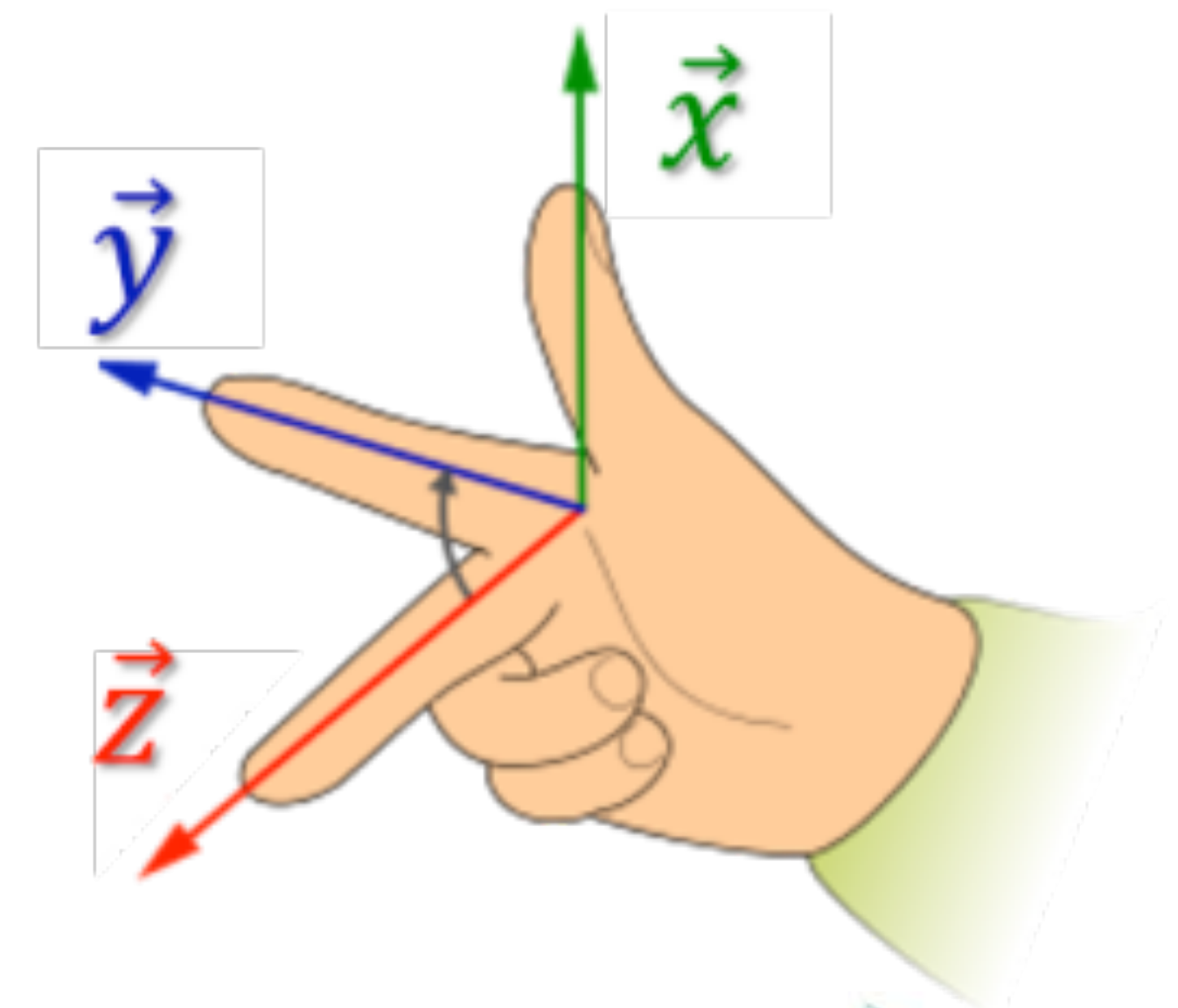
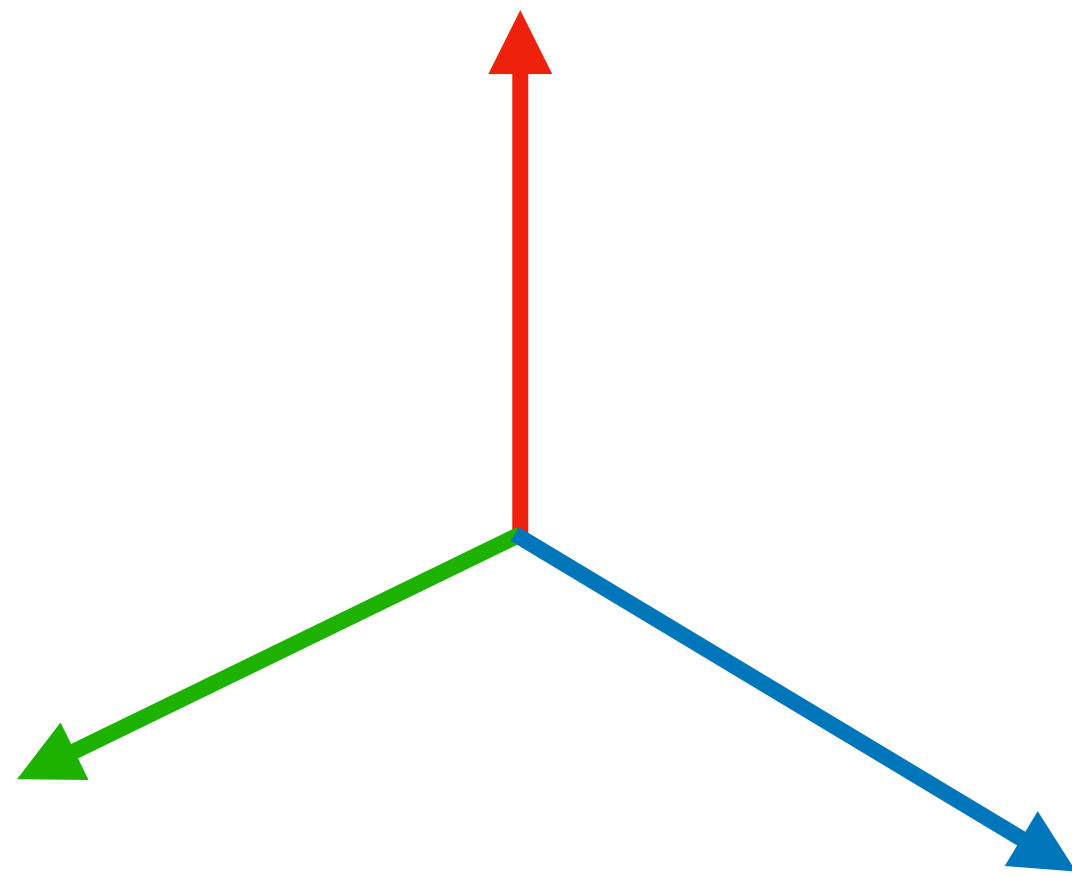
$(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ est la base orthonormée de vecteurs, liée au solide.

3. Repère lié au solide

Qu'est-ce qu'une base orthonormée directe ?

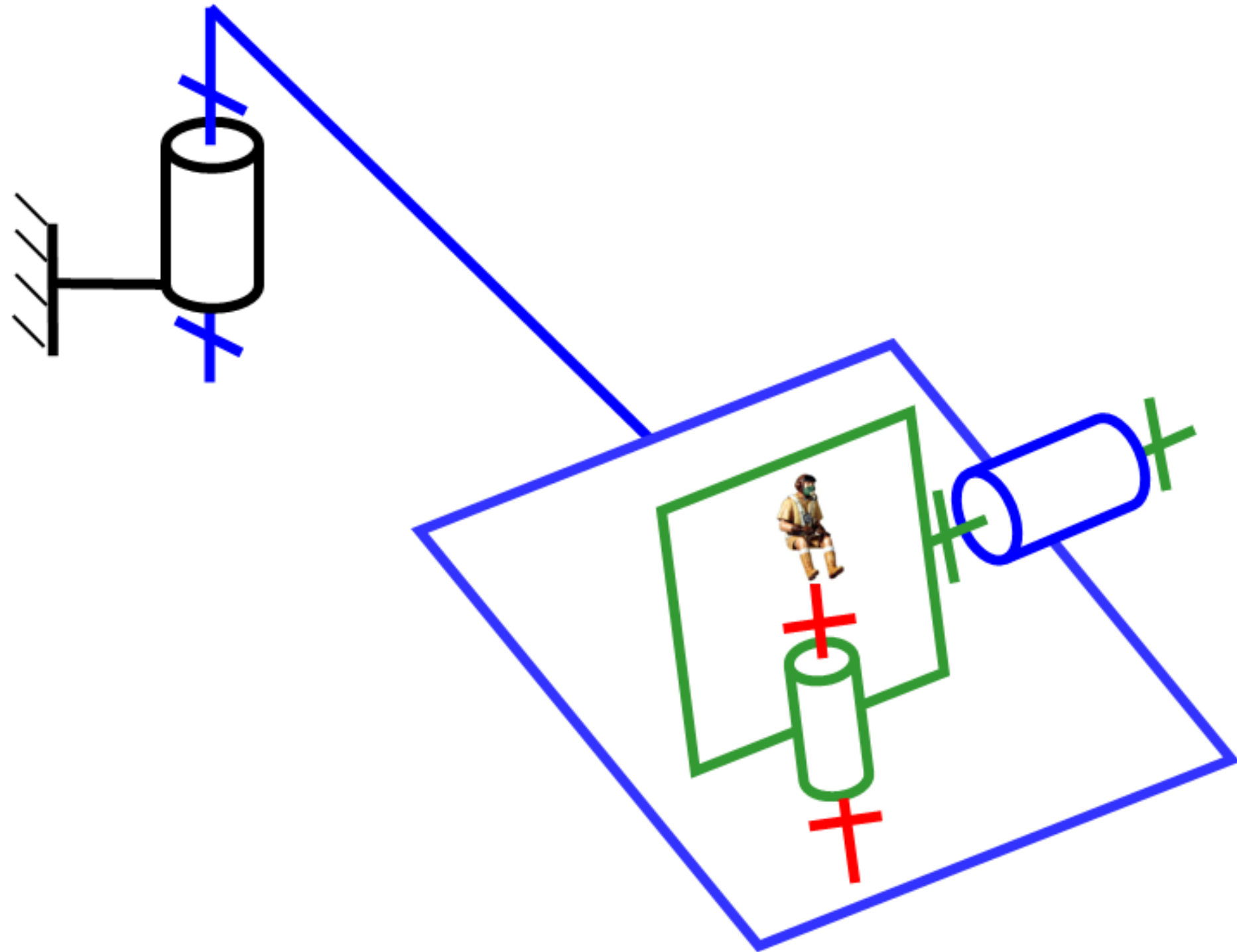
Une BOND vérifie les 3 propriétés suivantes :

- les normes des trois vecteurs sont égale à 1 (vecteurs unitaires);
- les 3 vecteurs sont orthogonaux 2 à 2 ;
- l'orientation des vecteurs vérifie la règle « des 3 doigts de la main droite » ou du « tire-bouchon ».



3. Repère lié au solide

Exemple : entraînement des pilotes de chasse



4. Position d'un point dans un mécanisme

L'Ingénieur doit pouvoir paramétrer la position **d'un point quelconque d'un mécanisme dans un repère donné**. Généralement, le repère utilisé est celui du bâti quand il existe.

Cependant, il est possible de repérer la **position d'un point dans tout repère** (lié à n'importe quel solide).

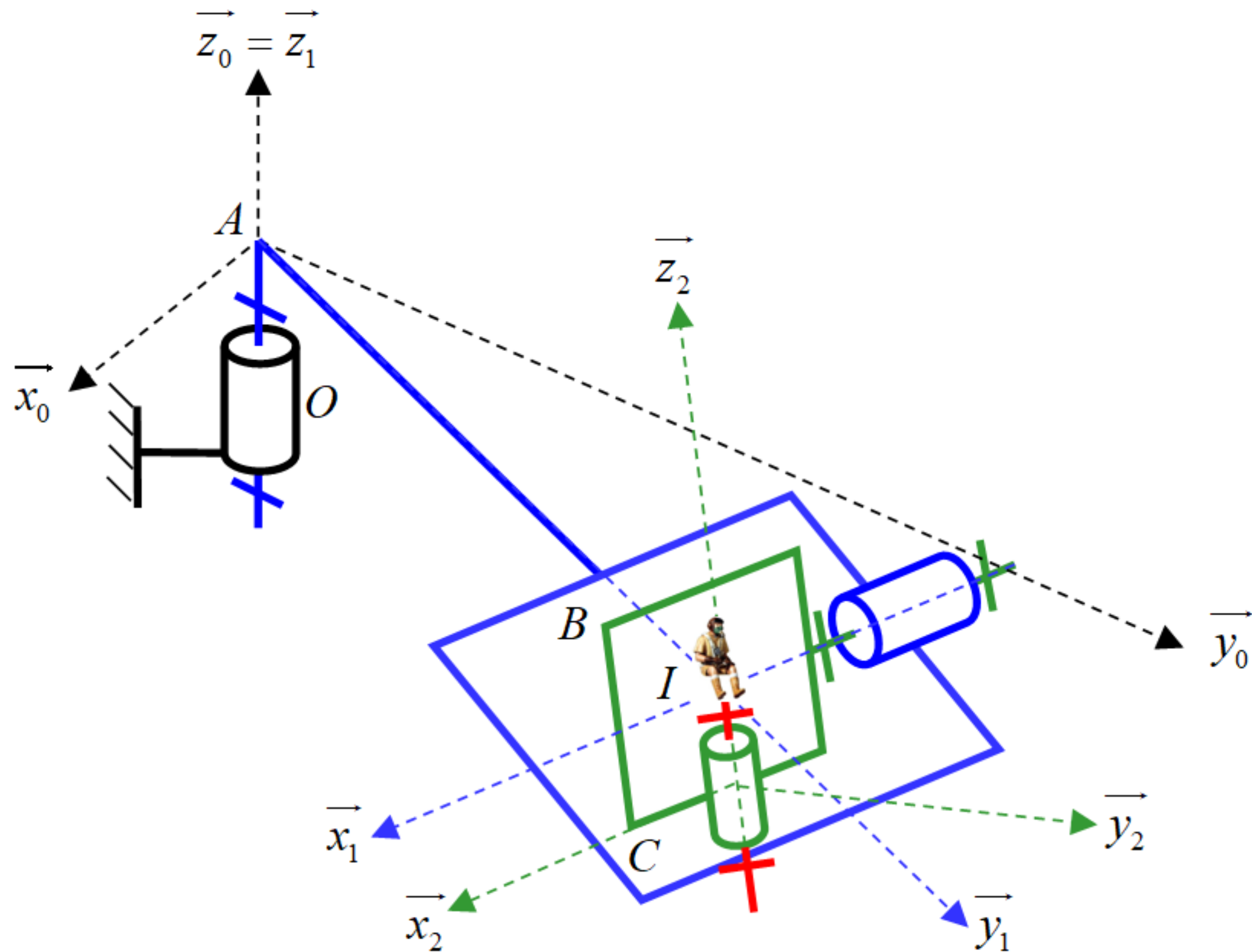
Définition 4 : vecteur position d'un point dans un repère

Pour tout point M d'un mécanisme, on définit le vecteur position de M dans un repère R_i lié au solide (S_i) comme le vecteur $\overrightarrow{O_i M}$.

Le vecteur position est indépendant de la base choisie pour écrire ses coordonnées

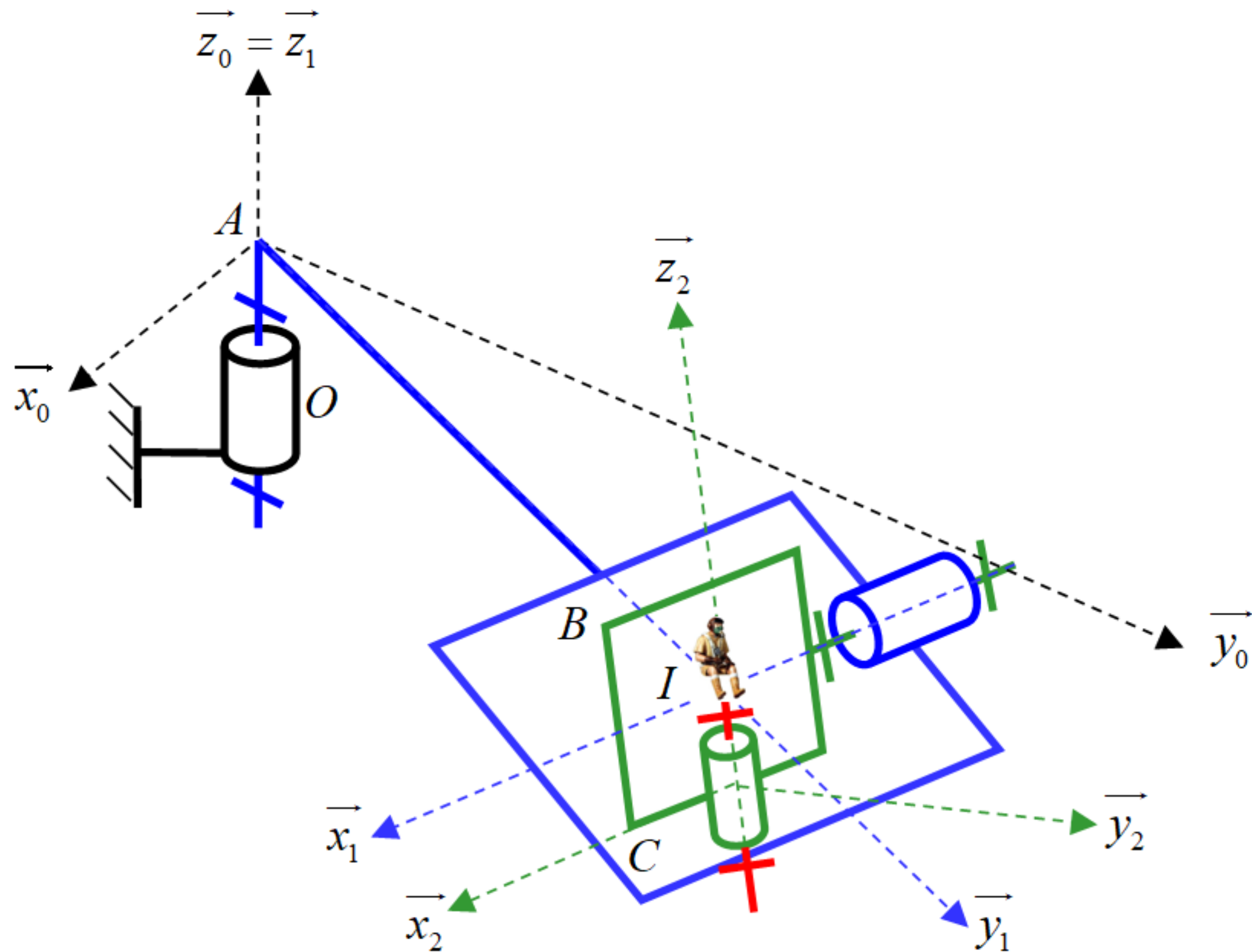
4. Position d'un point dans un mécanisme

Exemple : entrainement des pilotes de chasse



4. Position d'un point dans un mécanisme

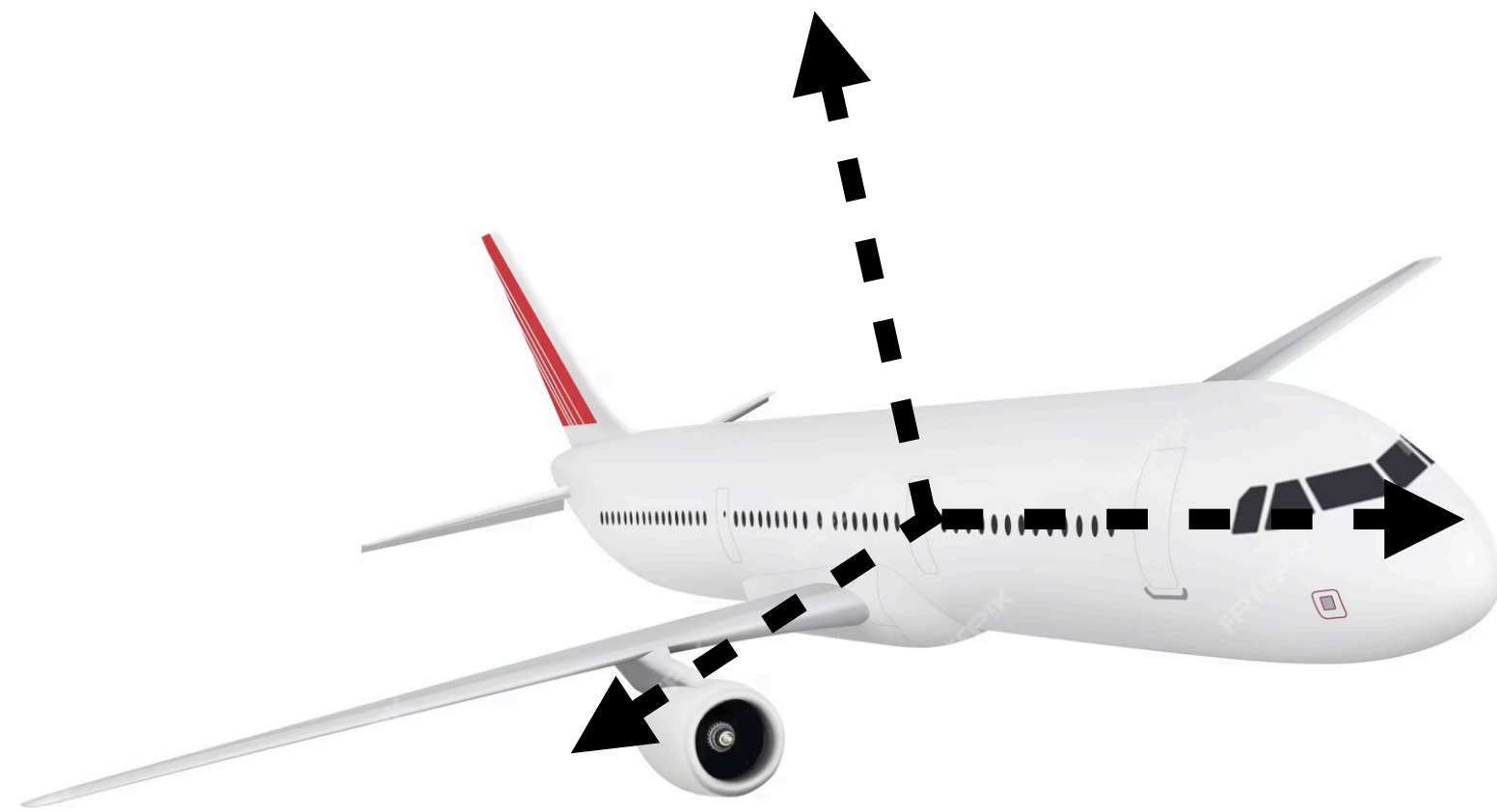
Exemple : entrainement des pilotes de chasse



4. Position d'un solide dans un mécanisme

Positionner un point d'un solide ne suffit pas à positionner tous les points du solide à chaque instant. Nous cherchons des outils permettant d'obtenir **la position d'un solide dans l'espace.**

Quels sont les mouvements possibles d'un solide ?



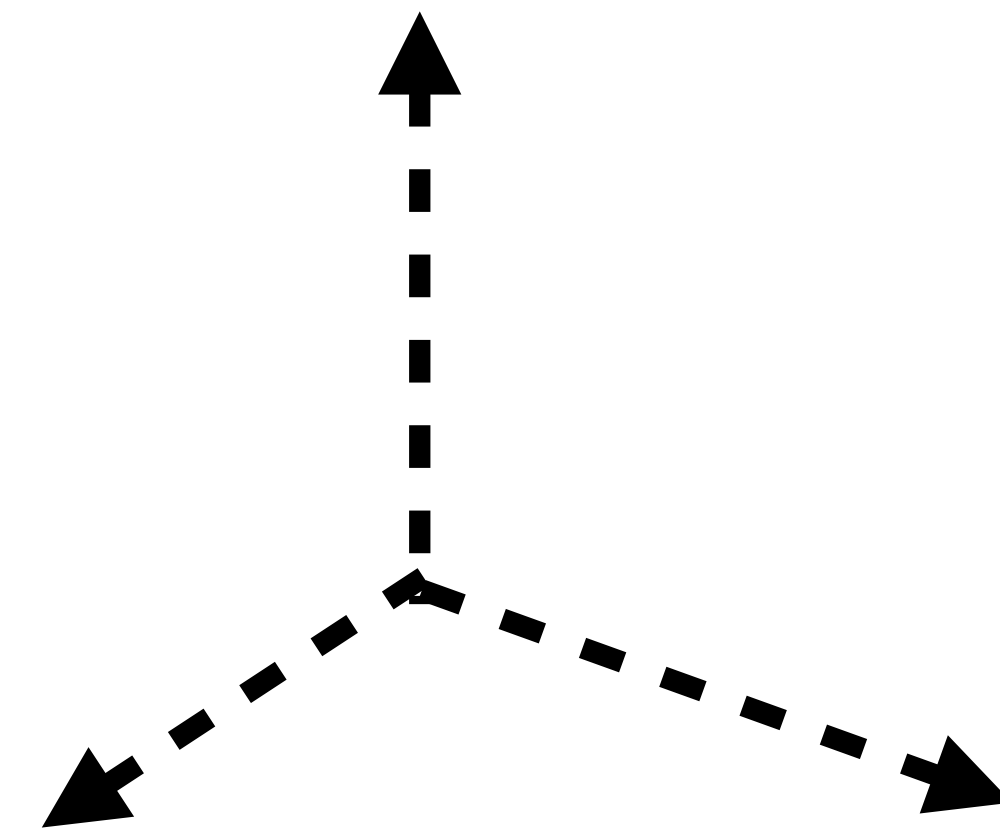
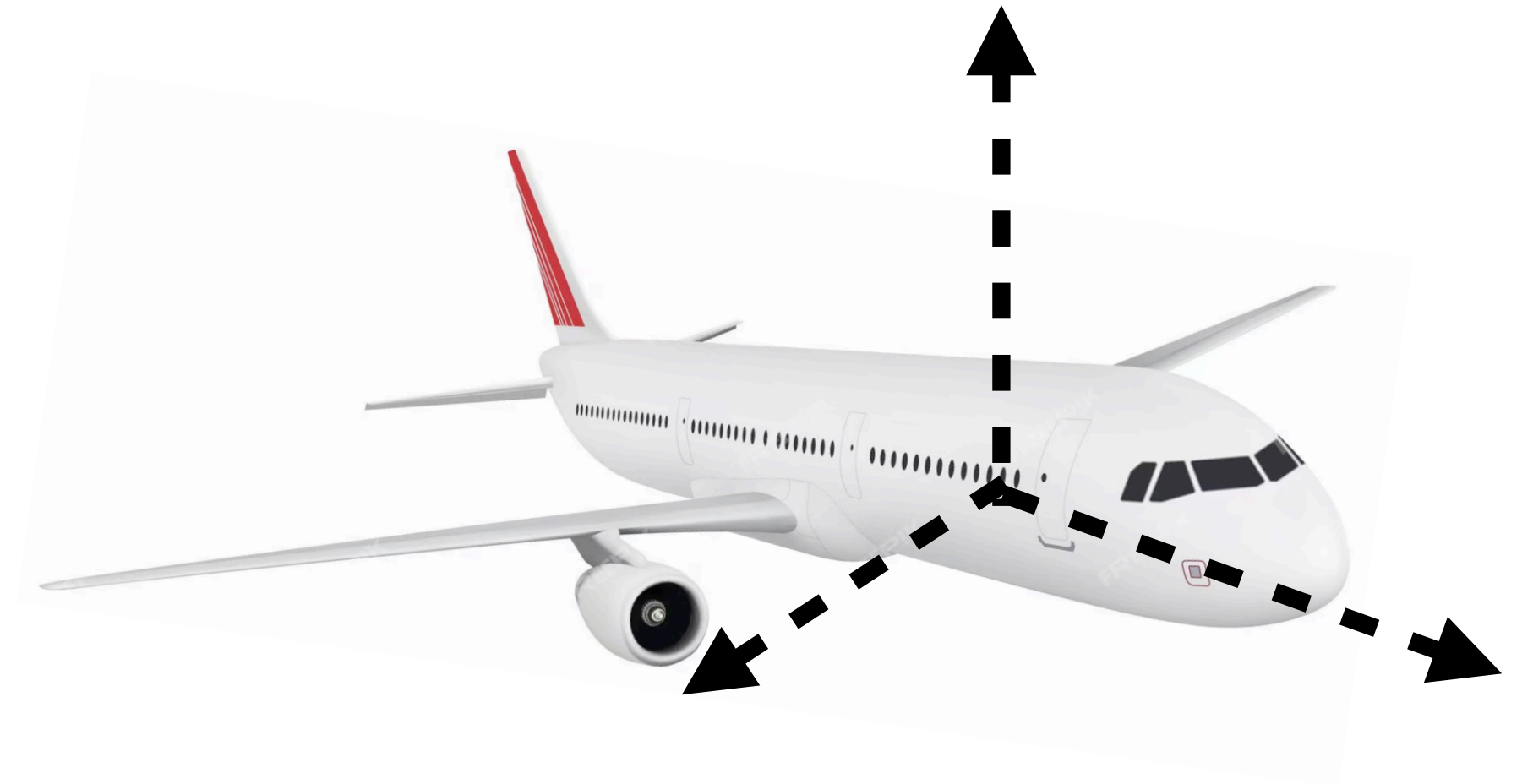
5. Position d'un solide dans un mécanisme

Lors des translations :

la trajectoire de tous les points est identique, donc **si l'on connaît la trajectoire d'un point**, on les connaît toutes.

Il suffit de connaître la trajectoire de l'origine du repère lié au solide :

vecteur position de O_i dans R_0 : $\overrightarrow{O_0O_i}$



5. Position d'un solide dans un mécanisme

Lors d'une rotation :

la BOND lié au solide $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ change d'orientation car le solide tourne.

Il faut donc définir un angle entre la BOND $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et la BOND liée au solide (S_i) .

On trace une figure angulaire plane entre les 2 bases selon l'axe de la rotation :

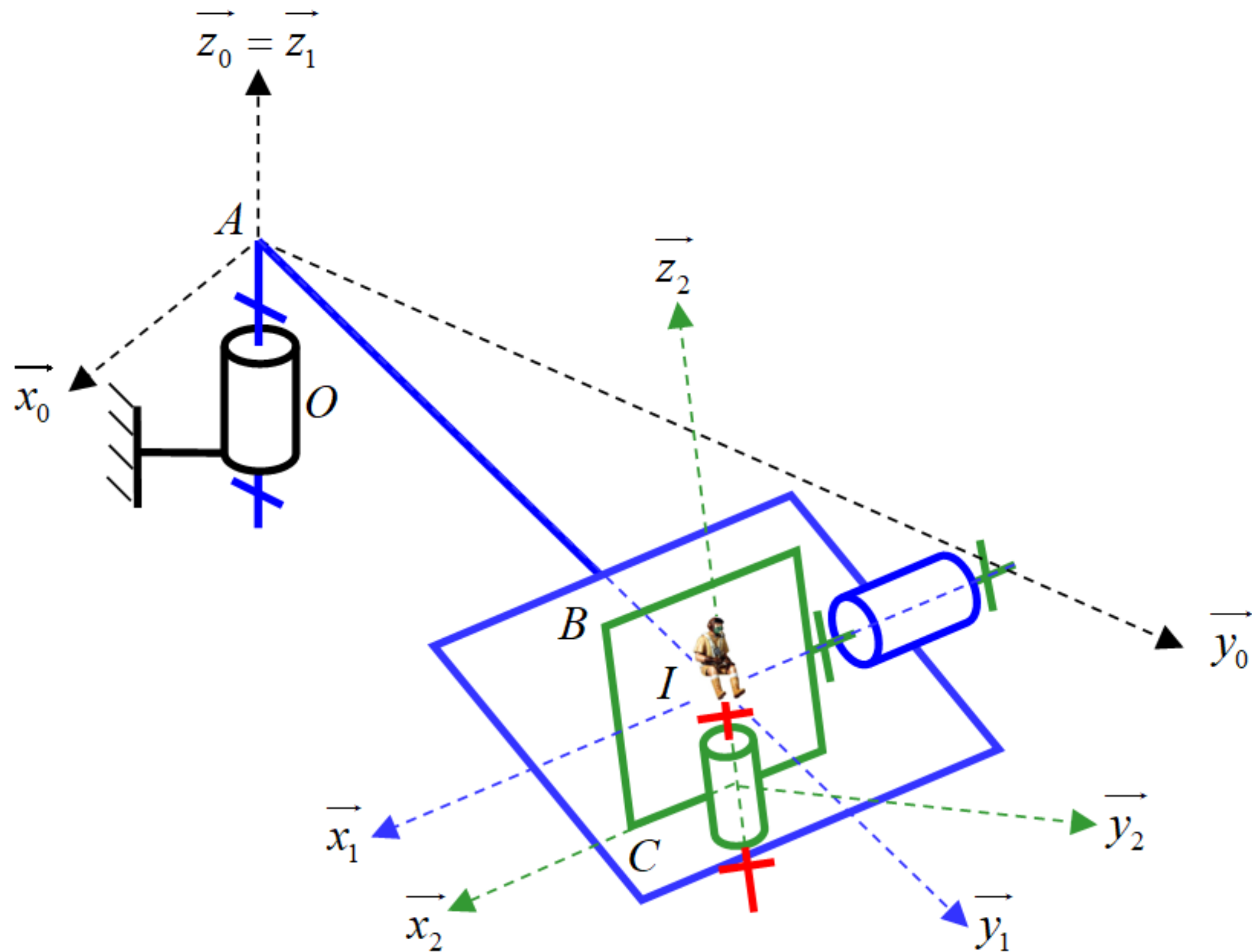
Autour de \vec{x}_0

Autour de \vec{y}_0

Autour de \vec{z}_0

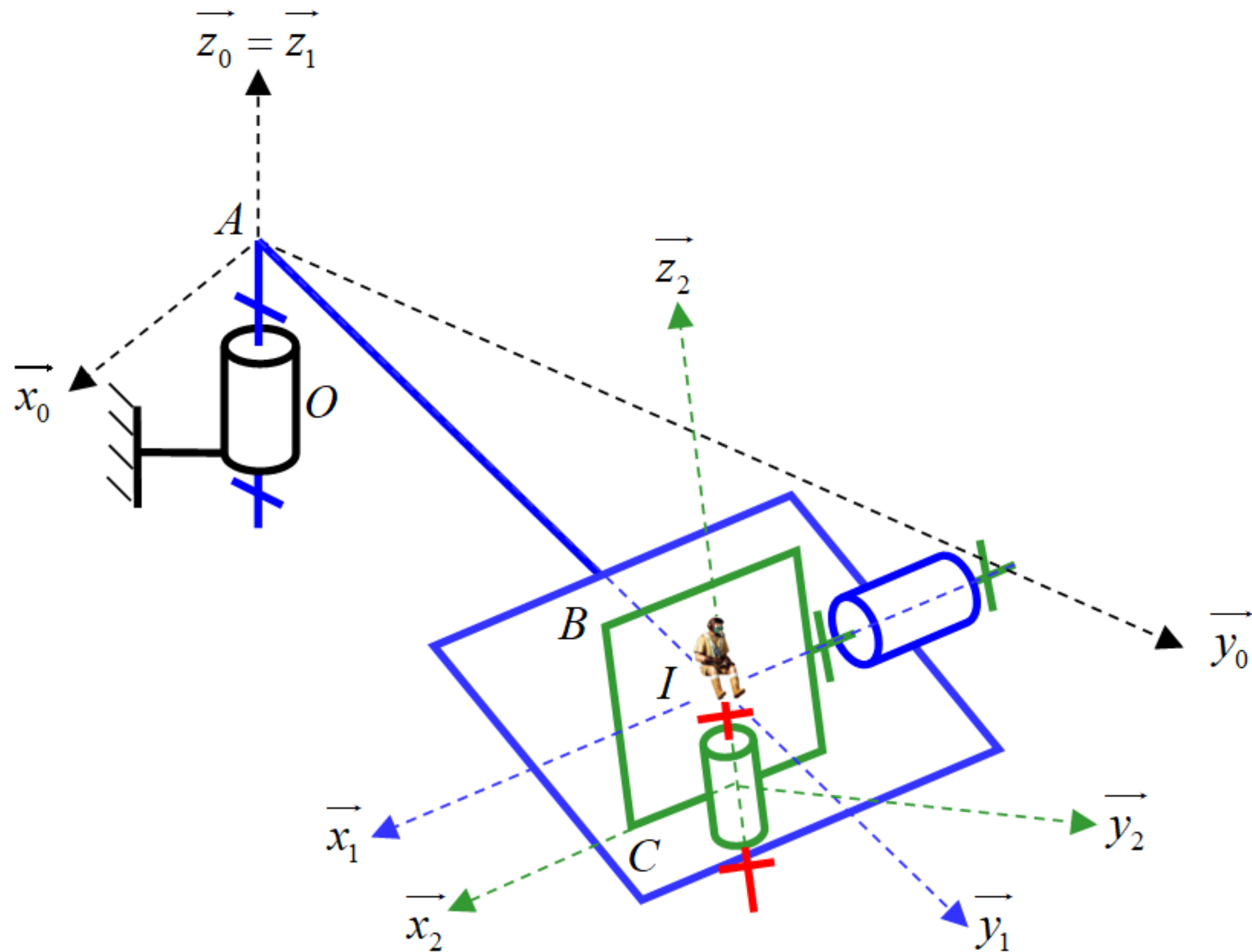
5. Position d'un solide dans un mécanisme

Exemple : entrainement des pilotes de chasse



5. Position d'un solide dans un mécanisme

Exemple : entrainement des pilotes de chasse



5. Position d'un solide dans un mécanisme

Lors d'une rotation :

Pour définir une rotation rigoureusement, il faut donc **un axe et une vitesse**. L'association des 2 forme un vecteur appelé **vecteur vitesse de rotation**.

Définition 5 : vecteur vitesse de rotation

Pour tout solide (S_i), de repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$, en rotation par rapport à un repère $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, on définit le vecteur rotation de S_i/R_0 :

$$\vec{\Omega}(i/0) = \omega_{i0} \cdot \vec{u}$$

ω_{i0} : vitesse angulaire en *rad/s*

\vec{u} : vecteur unitaire portant l'axe de rotation

6. Application : chaîne fermée de solides

De nombreux mécanismes sont constitués de **chaines ouvertes de solides** comme la centrifugeuse vue précédemment : **tous les mouvements possibles sont indépendants.**

Mécanisme à composition de mouvements

D'autres sont constitués de **chaines fermées de solides** avec une transformation d'un mouvement d'entrée en un mouvement différent en sortie : **le mouvement de sortie est dépendant du mouvement en entrée.**

Mécanisme à transformation de mouvement

6. Application : chaîne fermée de solides



Chaîne ouverte de solides

Mécanisme à composition de mouvements



6. Application : chaîne fermée de solides



Mécanisme à transformation de mouvement

Chaîne fermée de solides



6. Application : chaîne fermée de solides

On reconnaît un mécanisme à chaîne fermée de solides à l'aide du **graphe de liaisons du mécanisme**.

Définition 6 : chaîne fermée de solides

Un mécanisme est constitué d'une chaîne fermée de solides si le graphe de liaisons contient une ou **plusieurs boucles de solides**.

On appelle **nombre cyclomatique** γ , le nombre de chaîne fermée indépendantes du mécanisme :

$$\gamma = n - l + 1$$

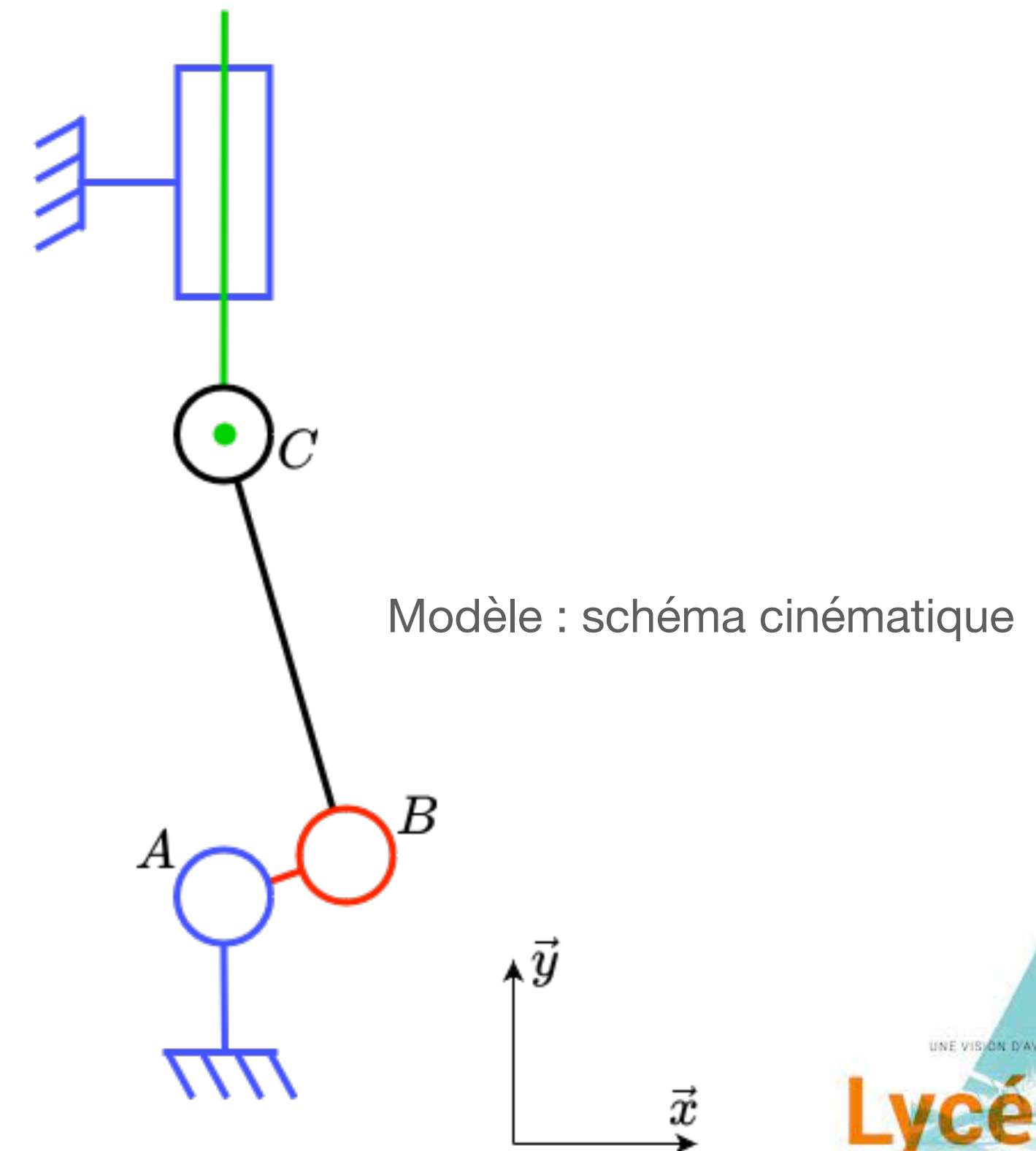
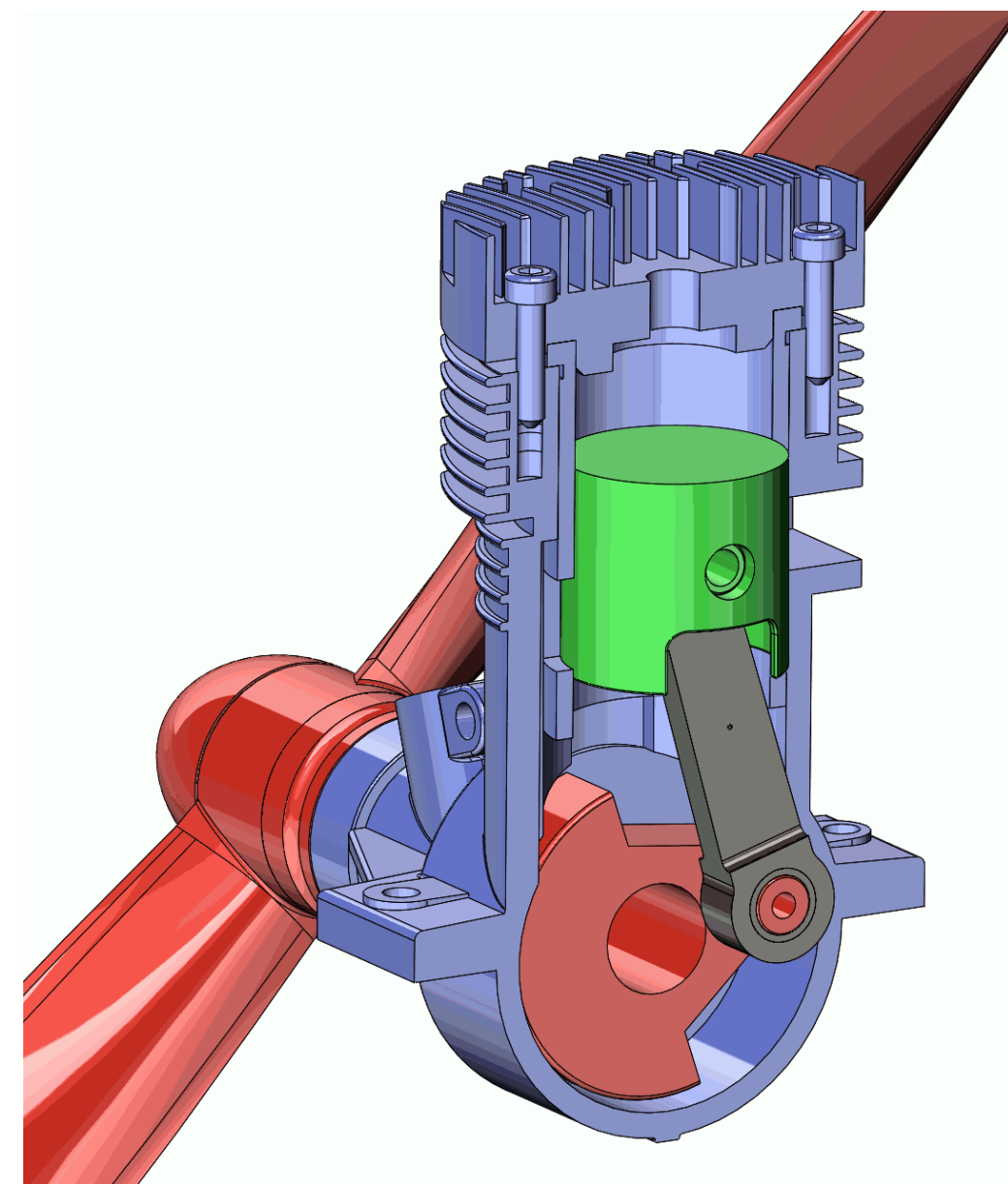
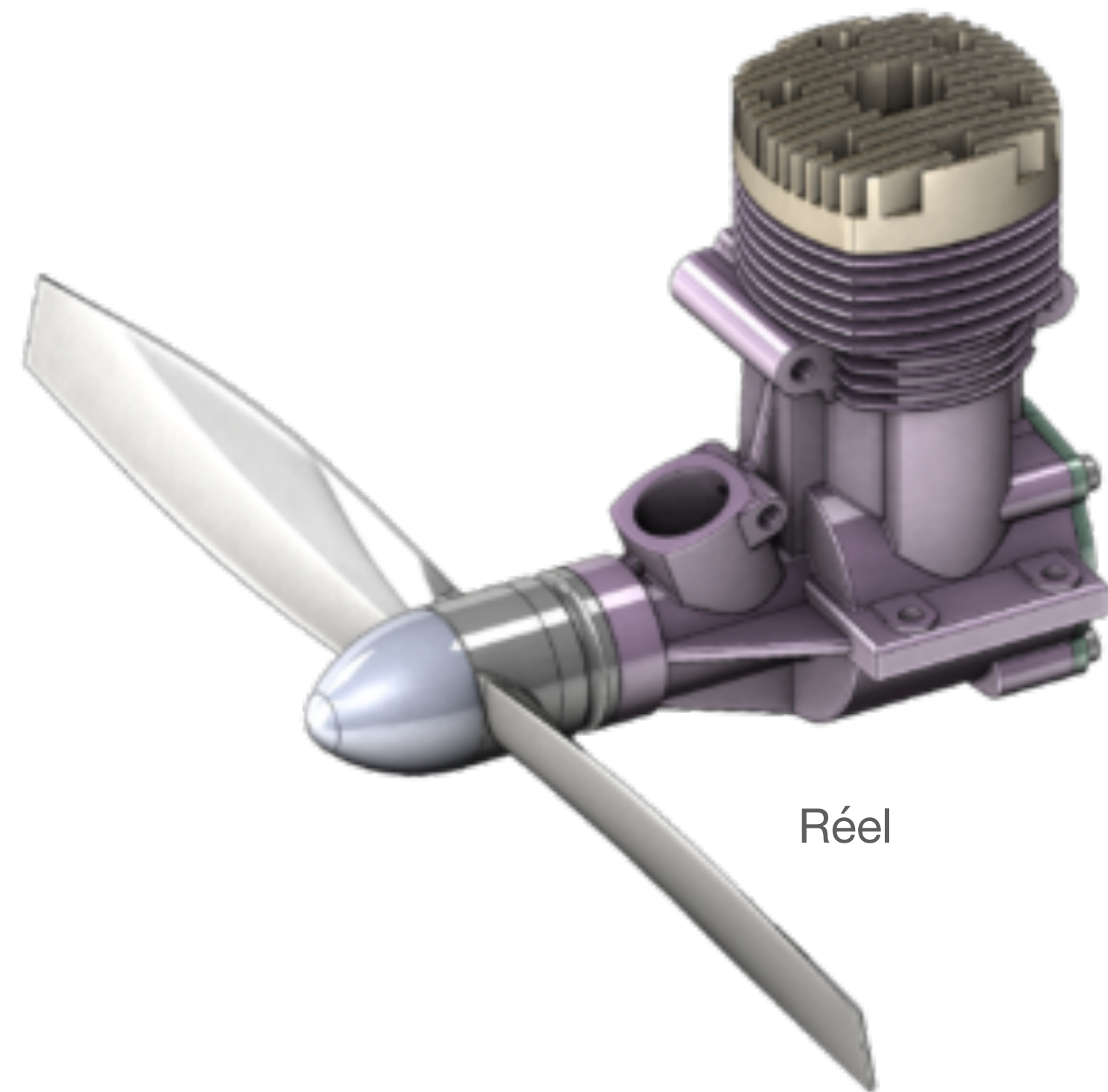
n : nombre de solides du mécanisme (avec le bâti)

l : nombre de liaisons dans le mécanisme

6. Application : chaîne fermée de solides

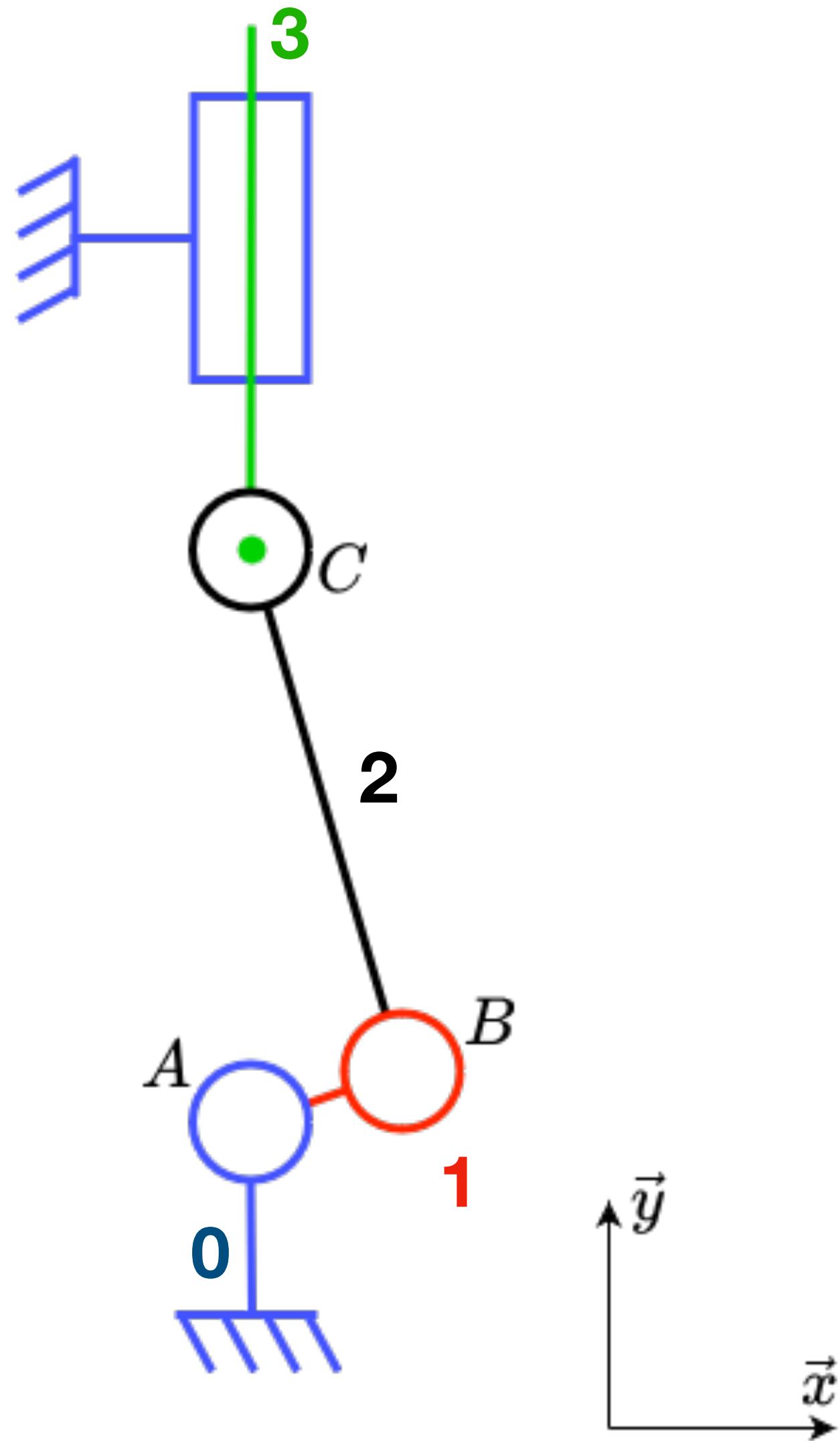
L'étude d'une chaîne fermée de solides doit permettre de déterminer le **mouvement de sortie en fonction du mouvement d'entrée** : c'est ce que l'on appelle **la loi Entrée / Sortie** du mécanisme.

Application : système bielle manivelle dans moteur 4 temps



6. Application : chaîne fermée de solides

Application : système bielle manivelle dans moteur 4 temps



Solides:

- 0 : bâti de repère $R_0(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
- 1 : vilebrequin de repère $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 = \vec{z})$
- 2 : bielle de repère $R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2 = \vec{z})$
- 3 : piston de repère $R_3(C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Paramètres :

$$\theta_{10} = (\vec{x}, \vec{x}_1) = (\vec{y}, \vec{y}_1)$$

$$\theta_{20} = (\vec{x}, \vec{x}_2) = (\vec{y}, \vec{y}_2)$$

$$\lambda_{30} = AC$$

6. Application : chaîne fermée de solides

Application : système bielle manivelle dans moteur 4 temps

6. Application : chaîne fermée de solides

Application : système bielle manivelle dans moteur 4 temps

6. Application : chaîne fermée de solides

Application : système bielle manivelle dans moteur 4 temps

```
#BIELLE MANIVELLE
#importation des bibliothèques
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
#définition des constantes du problème en variables globales
a=10
b=40
#####LOI ENTREE/SORTIE

#définition de la loi E/S
def loiES(lambd30):
    theta10=np.arcsin((-b**2+a**2+lambd30**2)/(2*a*lambd30))
    return theta10*360/6.28

#définition de la variable d'entrée
lambd30=np.linspace(30,50,100)
print(lambd30)

#calcul de la variable de sortie
theta10=loiES(lambd30)
print(theta10)

#tracé de la loi E/S
plt.plot(lambd30,theta10)
plt.xlabel("déplacement du piston (mm)")
plt.ylabel("angle de l'hélice (°)")
plt.legend()
plt.show
```

