Outils mathématiques de S2I

Les vecteurs

1. Caractéristiques d'un vecteur

1.1. définition

Un vecteur noté $\overrightarrow{AB}$ est défini par

- **son origine ou point d'application** A
- **sa direction ou droite ou support** Δ
- **son sens** De A vers B
- **sa norme (ou module** ou intensité) $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$=distance de A à B

1.2. notations

Pour un vecteur $\vec{V}$ de composantes V_x, V_y et V_z dans un repère orthonormé direct $\mathcal{R}(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

Il existe quatre notations usuelles :

$\vec{V}(\mathrm{Vx, Vy, Vz})$

$\vec{V}\left|\begin{matrix}\mathrm{Vx}\\ \mathrm{Vy}\\ \mathrm{Vz}\end{matrix}\right.$

$\vec{V}\begin{pmatrix}\mathrm{Vx}\\ \mathrm{Vy}\\ \mathrm{Vz}\end{pmatrix}$

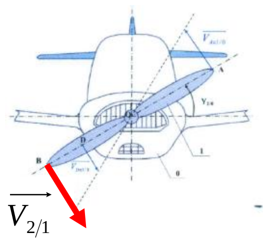
$\vec{V}=V_x.\vec{x}+V_y.\vec{y}+V_z.\vec{z}$

2. Différents types de vecteurs

- Vecteur libre : c'est un vecteur dont l'origine est arbitraire,

- Vecteur lié : c'est un vecteur dont l'origine est fixe,

  Exemple : le vecteur $\overrightarrow{V_{2/1}}$ vitesse d'un point de l'hélice est un vecteur lié :



- **Vecteur glissant** : c'est un vecteur qui glisse sur un support,

  Exemple : l'action $\overrightarrow{F_{m/c}}$ exercée par le client sur le caddie est un vecteur glissant :

- **Vecteur unitaire :** c'est un vecteur de module l'unité $\left\|\vec{u}\right\|=1$

- **Vecteurs équipollents** : ce sont des vecteurs qui ont même direction, même sens et même module. Ils coïncident à une translation près.

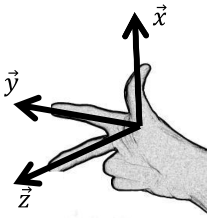
- **Vecteurs opposés** : ce sont deux vecteurs de sens contraires. L'opposé de $\vec{V}$ est égale à $-\vec{V}$

3. Base et Repères

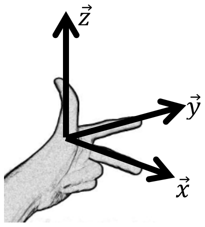
- **base B** : ensemble de 3 vecteurs linéairement indépendants $(\vec{V_1},\vec{V_2},\vec{V_3})$ tel que $(\vec{V_3})$ ne puissent s'écrire que $\vec{V}_3 = a.\vec{V}_1 + b.\vec{V}_2$.
- **Base orthogonale** : base dont les vecteurs sont orthogonaux deux à deux.
- **Base orthonormée** : Base orthogonale dont les vecteurs sont unitaires.
- **Base orthonormée directe** : Base orthonormée dont les axes forment un trièdre direct.

Règle des trois doigts pour repérer le trièdre direct : $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$

de la main droite avec $\vec{x}$ sur le pouce :

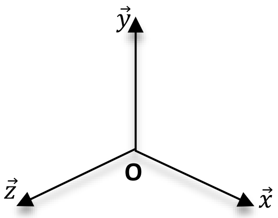


pour les droitiers, main gauche avec $\vec{x}$ sur le majeur -ce qui permet de ne pas lâcher le stylo- :

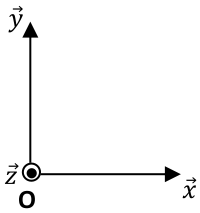


- **Repère** : association d'un point d'origine **O** et d'une base **B**. notation : Repère $\mathcal{R}$ $(O,\vec{V_1},\vec{V_2},\vec{V_3})$.
- **repère orthonormé direct** : Un point d'origine associé à une base orthonormée directe.

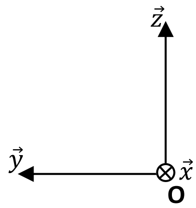
Représentation spatiale



Représentation plane



Représentation plane



- **Base de projection : La base dans laquelle on exprime les composantes d'un vecteur.**
- **base de dérivation** : La base dans laquelle est effectuée la dérivation.

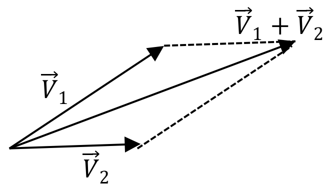
4. Opération sur les vecteurs

4.1. Somme vectorielle

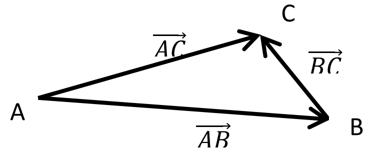
Si $\vec{V_1} = x_1.\vec{x} + y_1.\vec{y} + z_1.\vec{z}$

et $\vec{V_2} = x_2.\vec{x} + y_2.\vec{y} + z_2.\vec{z}$

alors $\vec{V_1} + \vec{V}_2 = (x_1 + x_2).\vec{x} + (y_1 + y_2).\vec{y} + (z_1 + z_2).\vec{z}$



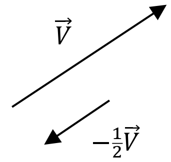
Relation de Chasles $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$



4.2. Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Si $\vec{V} = x.\vec{x} + y.\vec{y} + z.\vec{z}$ alors $\lambda.\vec{V} = \lambda.x.\vec{x} + \lambda.y.\vec{y} + \lambda.z.\vec{z}$

Les vecteurs $\vec{V}$ et $\lambda.\vec{V}$ sont des vecteurs colinéaires.



4.3. Produit scalaire

Opération qui associe à deux vecteurs un scalaire et est notée $\vec{V_1}.\vec{V_2}$

Le produit scalaire de deux vecteurs est un scalaire

4.3.1. forme analytique

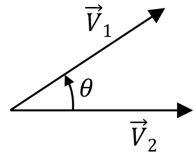
Soient $\vec{V_1} = x_1.\vec{x} + y_1.\vec{y} + z_1.\vec{z}$

et $\vec{V_2} = x_2.\vec{x} + y_2.\vec{y} + z_2.\vec{z}$

dans la base orthonormée $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Alors $\boxed{\vec{V_1}.\vec{V_2} = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2}$

4.3.2. forme géométrique



$\boxed{\vec{V_1}.\vec{V_2} = V_1.V_2.\cos\theta}$

Remarque : Si $\theta = 0$ alors $\vec{V_1}.\vec{V_2} = V_1.V_2$ Si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ alors $\vec{V_1}.\vec{V_2} = 0$

4.4. Produit vectoriel

4.4.1. Forme géométrique

Opération qui associe à deux vecteurs un troisième vecteur :

(Le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur)

tel que :

- $\vec{W}$ est perpendiculaire au plan formé par $\vec{U}$ et $\vec{V}$
- $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ forment un trièdre direct

$$\boxed{(\vec{U}, \vec{V}) \rightarrow \vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}}$$

Alors $\boxed{\|\vec{W}\| = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|.\sin\alpha}$

avec α angle entre $\vec{U}$ et $\vec{V}$

Cette opération est anticommutative et distributive par rapport à l'addition.

La norme du produit vectoriel correspond à l'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$

Propriétés :

- **Le produit vectoriel est anticommutatif** $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = -(\vec{V_2} \wedge \vec{V_1})$
- **Associativité par rapport à la multiplication par un scalaire** $\lambda.(\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}) = \lambda.\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \vec{V_1} \wedge \lambda.\vec{V_2}$
- **Distributivité** $\vec{V_1} \wedge (\vec{V_2} + \vec{V_3}) = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2} + \vec{V_1} \wedge \vec{V_3}$
- **Cas particulier** si : $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ alors $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \vec{V_3}$ avec $\vec{V_3} \perp \vec{V_1}$ et $\vec{V_3} \perp \vec{V_2}$

4.4.2. Forme analytique

En posant $\vec{V_1} = x_1.\vec{x} + y_1.\vec{y} + z_1.\vec{z}$ et $\vec{V_2} = x_2.\vec{x} + y_2.\vec{y} + z_2.\vec{z}$ dans la base orthonormée $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Alors $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = (y_1.z_2 - z_1.y_2).\vec{x} + (x_1.z_2 - z_1.x_2).\vec{y} + (x_1.y_2 - y_1.x_2).\vec{z}$

$$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \left| \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{matrix} \right. \wedge \left| \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{matrix} \right. = \left| \begin{matrix} y_1.z_2 - z_1.y_2 \\ x_1.z_2 - z_1.x_2 \\ x_1.y_2 - y_1.x_2 \end{matrix} \right.$$

4.5. Moment vectoriel d'un vecteur en un point

Soient :

- A un point appartenant au support de $\vec{V}$
- B un point quelconque de l'espace

Par définition le moment vectoriel de $\vec{V}$ au point B est :

$$\boxed{\overrightarrow{M_B(\vec{V})} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{V}}$$