Outils mathématiques de S2I

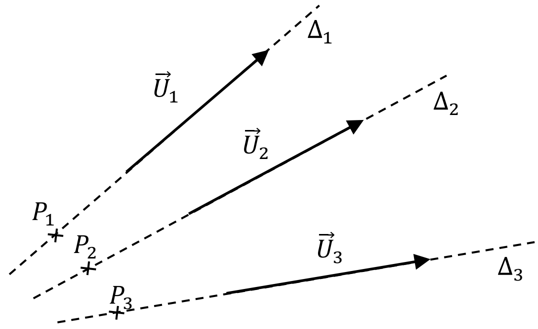
Torseurs

1. Définition

Le torseur est le représentant d'un ensemble de vecteurs glissants $\{\vec{U}_i, (\Delta_i)\}$, défini par ses **deux éléments de réduction** :

$\vec{R}$: la résultante du torseur $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{U}_i$

$\overrightarrow{M_A}$: le moment au point A du torseur $\overrightarrow{M_A} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{U}_i$



On note : $\{T\} = \left\{\begin{matrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_A} \end{matrix}\right\}_A$ ou $\{T\} = {}_A\{\vec{R}, \overrightarrow{M_A}\}$ Ce torseur comporte 6 composantes : $\{T\} = {}_A\left\{\begin{matrix} R_x & M_{A_x} \\ R_y & M_{A_y} \\ R_z & M_{A_z} \end{matrix}\right\}_{R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Remarque :

- **La résultante $\vec{R}$ du torseur est indépendante du point où est défini le torseur.**
- **Le moment $\vec{M}$ dépend du point où il est exprimé.**
-

2. Changement de point ou de réduction d'un torseur (« transport d'un torseur »)

Pour déplacer au point B un torseur exprimé en un point A, il faut :

- Conserver la résultante $\vec{R}$
- Déplacer le moment en utilisant la **relation du champ des moments** : $\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}$ (BABAR)

$$\boxed{\{T\} = {}_B\left\{\begin{matrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R} \end{matrix}\right\}}$$

3. Egalité de deux torseurs

Deux torseurs sont égaux s'ils ont mêmes éléments de réductions en un point, réciproquement s'ils ont mêmes éléments de réduction en un point, ils sont égaux.

$$\{T_1\}_A = \{T_2\}_A = {}_A\left\{\begin{matrix} \vec{R}[T_1] = \vec{R}[T_2] \\ \overrightarrow{M}_{A[T_1]} = \overrightarrow{M}_{A[T_2]} \end{matrix}\right\}$$

4. Somme de torseurs

Soit deux torseurs dont les éléments de réductions en un point sont connus

$$\{T_1\}_A = {}_A\left\{\begin{matrix} \vec{R}[T_1] \\ \overrightarrow{M}_{A[T_1]} \end{matrix}\right\}_R \quad \{T_2\}_A = {}_A\left\{\begin{matrix} \vec{R}[T_2] \\ \overrightarrow{M}_{A[T_2]} \end{matrix}\right\}_R$$

alors $\{T_1 + T_2\}_A = {}_A\left\{\begin{matrix} \vec{R}[T_1] + \vec{R}[T_2] \\ \overrightarrow{M}_{A[T_1]} + \overrightarrow{M}_{A[T_2]} \end{matrix}\right\}$

5. Multiplication par un scalaire

Soient, $\{T\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}_{[T]} \\ \vec{M}_{A[T]} \end{Bmatrix}_R$ et λ un réel

Alors $\lambda.\{T\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \lambda.\vec{R}_{[T]} \\ \lambda.\vec{M}_{A[T]} \end{Bmatrix}_R$

6. Eléments particuliers d'un torseur

6.1. Point central

On appelle point central d'un torseur, tout point de l'espace où le moment résultant est colinéaire à la résultante générale.

$$\boxed{\vec{R} \wedge \vec{M}_P = \vec{0}}$$

6.2. Axe central

L'ensemble des points centraux est appelé axe central d'un torseur. Considérons un torseur de résultante $\vec{R}$ non nulle. Alors on montre que les **points** P tels que $\vec{M}_P$ soit colinéaire à $\vec{R}$ forment une droite appelée axe central d'un torseur.

Propriété

- L'axe central d'un torseur est le lieu des points ou le moment est minimum.
- Cet axe central existe et est unique pour tout torseur, sauf dans le cas particulier du couple et du torseur nul, où la résultante est nulle.
- Dans le cas d'un glisseur, les moments sur l'axe central sont nuls.

6.3. Equiprojectivité du champ des moments d'un torseur

Le champ des moments d'un torseur est **équiprojectif :** $\boxed{\overrightarrow{AB}.\vec{M}_A = \overrightarrow{AB}.\vec{M}_B}$

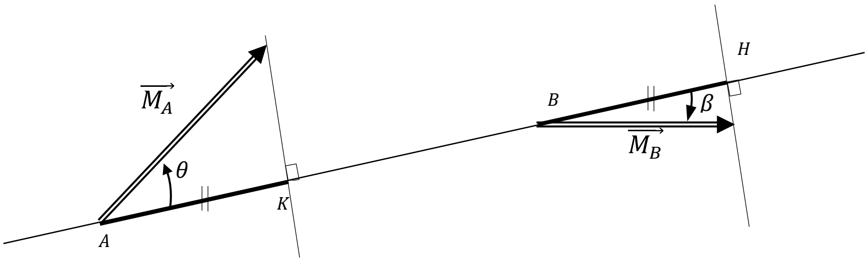
Interprétation graphique

$$\overrightarrow{AB}.\vec{M}_A = \overrightarrow{AB}.\vec{M}_B$$

$$AB.M_A.\cos\alpha = AB.M_B.\cos\beta$$

$$AB.AK = AB.BH$$

Donc $\boxed{AK = BH}$



6.4. Torseurs particuliers

6.4.1. Torseur nul

Définition : Un torseur est nul si ses éléments de réduction en un point quelconque sont nuls. Il est noté {0}.

$$\boxed{\{T\} = \{0\}}$$

6.4.2. Torseur Force ou Glisseur

Définition : On appelle torseur Glisseur un torseur pour lequel il existe un point où son moment est nul.

$$\boxed{\{T\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}$$

6.4.3. Torseur Couple

Définition : Un torseur est appelé torseur Couple si sa résultante est nulle et si son moment n'est pas nul.

Propriété : Un torseur couple est indépendant du point où il est exprimé.

$$\boxed{\{T\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M}_B = \vec{M}_A \end{Bmatrix}}$$