ANALYSE FREQUENTIELLE ET FILTRAGE

Table des matières

1 MISE EN SITUATION

L'analyse de systèmes linéaires comporte deux grandes classes :

- **L'analyse temporelle** où l'on observe le comportement du système en fonction du temps. Cette analyse fait appel aux **équations différentielles**.
- **L'analyse fréquentielle** où l'on observe le comportement du système en fonction de la fréquence de la grandeur de commande ou d'entrée. Cette analyse fait appel **aux complexes.**

Cette analyse fréquentielle peut porter sur des applications électriques (filtres) ou sur l'étude du comportement de systèmes très divers, par exemple :

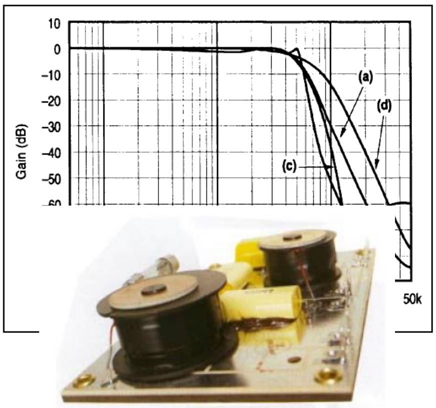
- Médical: mesure de l'acuité auditive d'un patient (domaine 50 à 15000 Hz)
- Maintenance préventive : analyse vibratoire de systèmes tournants (0,1 Hz à quelques kHz)
- Système asservi : ajustement des paramètres d'un correcteur pour éviter oscillations ou dépassement (selon l'application)
- Acoustique : analyse ou signature d'un bruit, d'une voix, pour l'identification…

La réponse permanente d'un système linéaire (appelée aussi réponse harmonique) à une commande sinusoïdale est une sinusoïde de même pulsation que la sinusoïde de commande, **modifiée en amplitude et déphasée**.
L'étude de la réponse harmonique d'un système consiste simplement à étudier le nombre complexe T(jw) qu'on appelle transmittance harmonique (ou transmittance complexe).

Le filtrage est une forme de traitement de signal, obtenu en envoyant le signal à travers un ensemble de circuits électroniques pour :

- modifier son spectre de fréquence et donc sa forme
- modifier sa phase et donc sa forme
- extraire une partie de l'information liée à ce signal
- éliminer ou affaiblir des fréquences parasites indésirables
- isoler dans un signal complexe la ou les bandes de fréquence utiles

Le filtrage s'applique à des signaux représentés sous forme analogique (filtres analogiques), ou sous forme numérique après échantillonnage du signal (filtres numériques).
Les filtres s'appliquent aux systèmes de télécommunication (téléphone, télévision, radio, magnétoscopes, transmission de données), aux systèmes d'acquisition et de traitement de signaux physiques (surveillance médicale, ensemble de mesure, radars), et de façon générale à tous les signaux qu'ils soient analogiques ou numériques. Les systèmes d'alimentation électriques utilisent aussi des filtres (passe-bas) pour éliminer les parasites indésirables.
Un filtre est caractérisé par une fonction de transfert $T_{(j\omega)}$ déterminant le rapport V_s/V_e des tensions d'entrée et de sortie.
Pratiquement, un filtre est caractérisé par deux courbes de réponse, amplitude/fréquence et phase/fréquence.
Historiquement les filtres ont été constitués à partir de composants discrets passifs (L, C, R) assemblés en chaîne de cellules. Mais c'est une technique qui se prête mal à la miniaturisation. De nouvelles techniques de réalisation se sont imposées qui permettent d'intégrer certains types de filtres dans les circuits intégrés en remplaçant les inductances par des condensateurs. C'est le cas des filtres actifs, utilisant des amplificateurs différentiels intégrés, en particulier les filtres à capacités commutées utilisés dans les centraux téléphoniques. Actuellement, ils tendent à être remplacés par des filtres numériques, intégrés aux calculateurs de contrôle-commande.

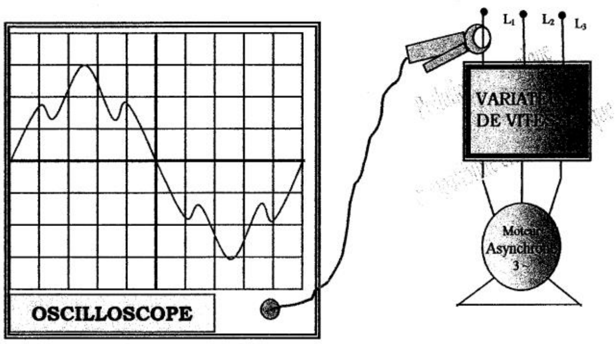


La grande famille des filtres se divise en plusieurs catégories :

- **Les filtres analogiques,**
  - **passifs (circuits RLC),**
  - **actifs (ampli. opérationnels, résistances, capacités),**
  - **à capacités commutées,**
- **Les filtres numériques.**

2 SIGNAUX NON SINUSOÏDAUX

Les systèmes électriques et en particulier les convertisseurs statiques d'électronique de puissance sont à l'origine de signaux périodiques non-sinusoïdaux. On parle alors de pollution harmonique.



Par exemple, le courant circulant dans une phase à l'entrée d'un variateur de vitesse est bien périodique mais n'est plus sinusoïdal (dû aux commutations des interrupteurs statiques du variateur et aux formes de tensions en créneaux obtenues).
Les effets de ces harmoniques peuvent être très gênants : le courant efficace augmente donc les pertes augmentent et le rendement diminue. Les distorsions en courant et tension peuvent créer des perturbations dans le fonctionnement des appareils de protection, échauffer davantage les matériels électriques donc les faire vieillir prématurément, créer un effet de flicker (éclairage, écrans)…

Il faut donc souvent éliminer ces harmoniques pour ne garder du signal que la partie la plus intéressante.
Pour cela il faut donc un outil permettant de décomposer le signal non-sinusoïdal en une somme de signaux sinusoïdaux de fréquences différentes, c'est la décomposition en série de Fourier.
On pourra alors, par exemple, **filtrer le signal** pour obtenir un fonctionnement optimal. Ce type de filtre est appelé filtre anti-harmonique dans les réseaux de distribution. La norme impose de limiter la génération d'harmoniques à un seul prédéfini.

2.1 Définition des développements en série de Fourier

Tout signal x(t) non sinusoïdal périodique peut se décomposer en une somme de sinusoïdes de fréquences différentes appelées harmoniques de la fréquence dite fondamentale $\boxed{x(t) = A_0 + \sum_1^{\infty}(A_n.\cos(n\omega t) + B_n.\sin(n\omega t))}$

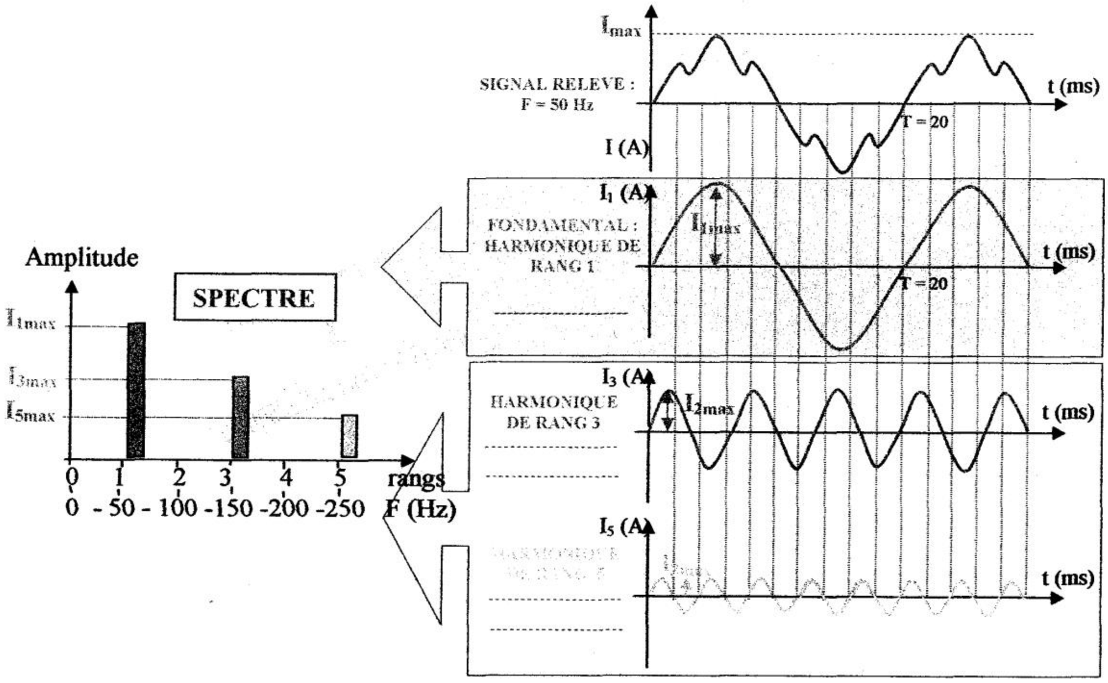
Le terme A_0 correspond à la valeur moyenne : $A_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t).dt$

Le terme général A_n par : $A_n = \frac{2}{T}\int_T x(t).\cos(n\omega t).dt$

Le terme général B_n par : $B_n = \frac{2}{T}\int_T x(t).\sin(n\omega t).dt$

2.2 Spectre de fréquence

On peut alors représenter x(t) par un spectre de fréquence : chaque terme est représenté par son amplitude et par sa phase sur deux graphes distincts.
En général, on recherche plutôt l'énergie ou la puissance transmise par un signal, on s'intéresse donc plus au spectre d'amplitude.
Néanmoins, la reconstitution temporelle de x(t) nécessite de connaître également les phases.



Il y a équivalence entre x(t) signal périodique et ce spectre de fréquence défini pour les fréquences n/T.

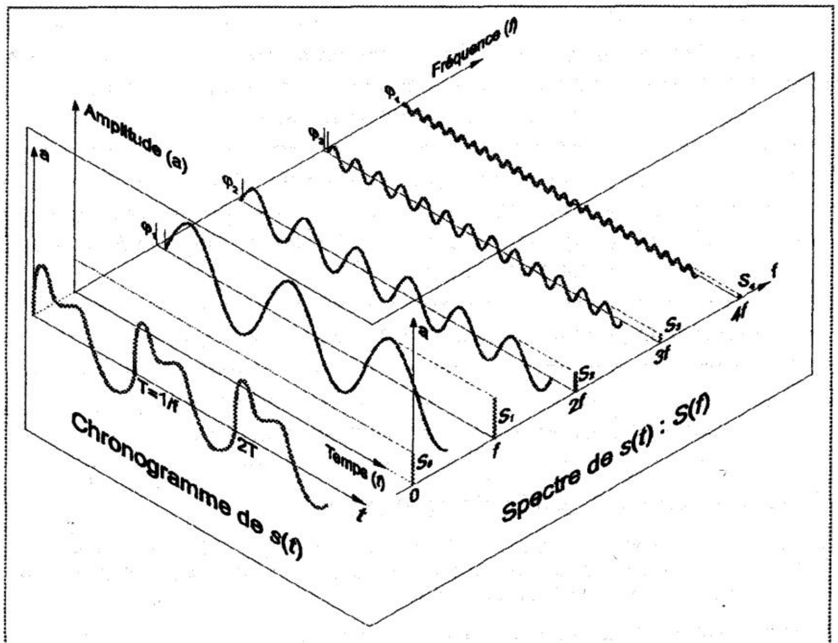


Figure 2 : représentation tridimensionnelle d'un signal périodique.

La FFT (fast fourier transformation) est un algorithme permettant de tracer rapidement le spectre avec une discrétisation du signal de départ qui est numérisé. La plupart des oscilloscopes numériques permettent de tracer un spectre grâce à cet algorithme. On doit cependant bien prendre un nombre entier de périodes pour éviter des erreurs. Plusieurs fenêtres de reconstruction sont possibles (Hann, Hamming, Blackman….)

On peut à l’aide de filtres adaptés éliminer les fréquences indésirables du signal, ce qui modifie son spectre.

2.3 La représentation fréquentielle d'un signal simple

Le signal le plus simple du point de vue fréquentiel est le signal sinusoïdal. Par exemple,

$\boxed{V(t) = V_m \sin \omega . t}$ ne contient qu'une seule fréquence : $\boxed{f = \dfrac{\omega}{2.\Pi}}$

Un signal parlé ou musical est plus complexe, puisque son allure varie constamment au cours du temps. Il contient des fréquences graves, moyennes et aiguës. Son spectre s'étend de 20 Hz à 20 kHz et varie en permanence entre ces deux fréquences extrêmes.
Le signal vidéo est encore plus complexe et son spectre s'étend du continu à quelques mégahertz. Le spectre d'un signal nous renseigne donc sur les différentes composantes fréquentielles qu'il contient.

Le spectre d'un signal est la représentation en fonction de la fréquence des amplitudes des différentes composantes présentes dans le signal.

Prenons quelques exemples de spectres théoriques et réels :

Figure 5. Spectre d'un signal sinusoïdal

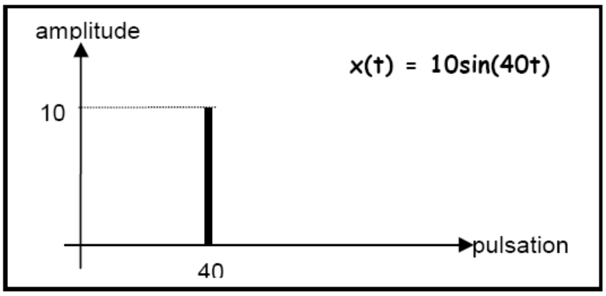


Figure 6. Spectre d'un signal composite

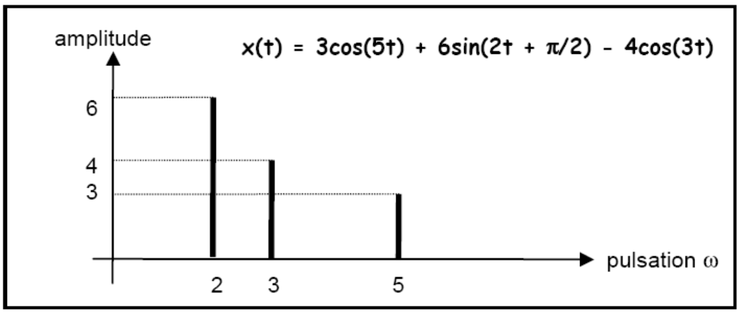
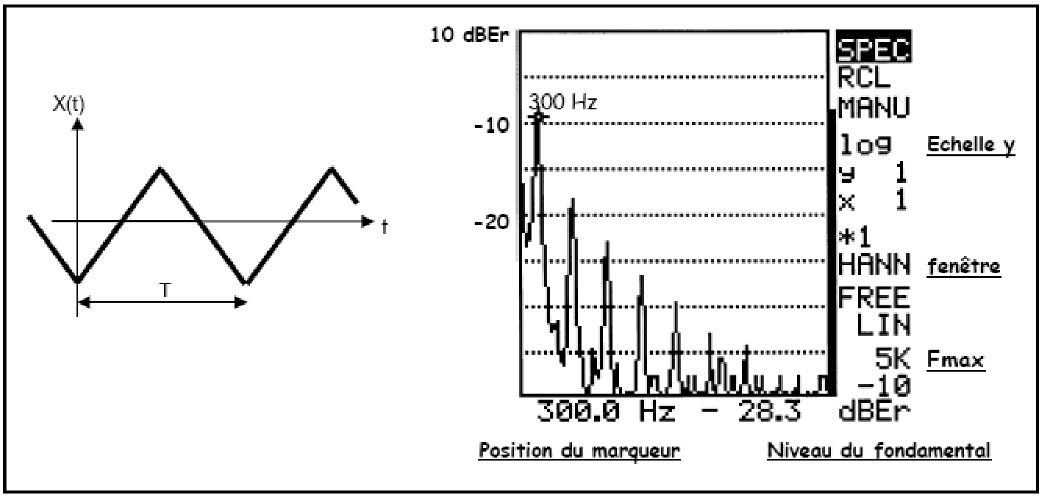


Figure 7. Spectre d'un signal triangulaire à 300 Hz

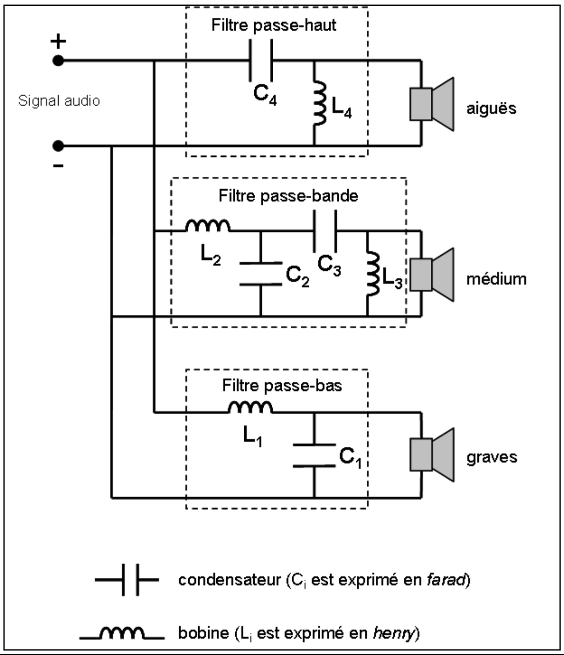


C'est un spectre formé de raies d'amplitudes décroissantes aux fréquences f, 3f, 5f …

3 TECHNOLOGIES DES SOLUTIONS DE FILTRAGE

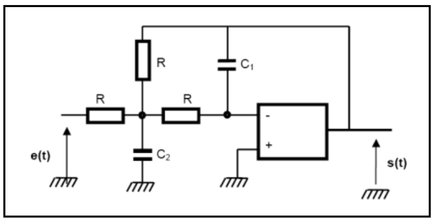
3.1 Filtres passifs

Ils sont presque toujours constitués d'inductances de haute qualité et de condensateurs.
Jusque dans les années 1970, les filtres passifs LC étaient pratiquement les seuls utilisés. Il en existe un très grand nombre en usager en particulier en téléphonie et audiovisuel. Actuellement la tendance est de n'utiliser ces filtres passifs que pour les hautes ou très hautes fréquences, ou pour filtrer des signaux de puissance élevée.
Leur principal défaut est de ne pas être intégrables (bien que des inductances intégrées commencent à apparaître en laboratoire pour de faibles valeurs), et de nécessiter l'emploi d'inductances de haute qualité, en général bobinées, donc encombrantes, lourdes et coûteuses.
Exemples :

Lutter contre la 4G en TNT A la mise en route des émetteurs 4G, certains riverains ont été privés de télévision. Les fréquences utilisées par la 4G sont comprises dans plusieurs bandes de fréquences, communément appelées la bande des 800 MHz et des 2600 Mhz. Pour éviter qu'elles interférent sur les signaux TNT, compris entre 470 et 790 Mhz, il suffit d'éliminer les fréquences de la 4G à l'entrée du décodeur TNT avec un filtre dit « coupe-bande ». C'est ce que fait SMF 790 de SPAUN. Il apporte une atténuation de 50 dB entre 822 et 1000 MHz tandis qu'il laisse passer toutes les fréquences comprises entre 5 et 790 MHz en apportant une atténuation de 1 dB (donnée constructeur) sur cette bande de fréquence.	
Filtre de répartition 3 voies Dans une enceinte acoustique, chaque haut-parleur est spécialisé dans la reproduction d'une bande fréquentielle particulière. Par exemple, une enceinte à deux voies peut être constituée d'un haut-parleur à membrane conique restituant les basses et moyennes fréquences, et d'un haut-parleur à compression et pavillon diffusant les fréquences hautes. Le rôle d'un filtre de répartition est de décomposer le signal audio à reproduire en plusieurs signaux dont le spectre fréquentiel est limité et adapté aux différents haut-parleurs de l'enceinte. **Filtre haut -parleur pro 3 voies** 1,3 Khz/2,6 Khz SD-3006A Fréquence de coupure : 1,3 Khz et 2,6 Khz Puissance admissible : 400 watts Impédance : 6-8 ohms Atténuation : 12 dB / octave Dimensions : 15,5 cm x 12 cm Poids du filtre : 680 grs Tarif : 72€ 	

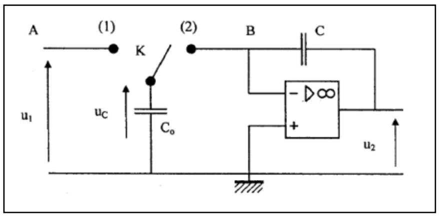
3.2 Filtres actifs

Les filtres précédents sont réalisés au moyen de condensateurs, de bobines et de résistances. Lorsqu'ils sont insérés dans un circuit, ils provoquent souvent une atténuation non désirée du signal. En outre, lors de l'utilisation de filtres passifs pour des fréquences basses, la valeur des inductances est grande et leurs dimensions mécaniques sont importantes. Les ALI - Amplificateurs Linéaires Intégrés- permettent de réaliser les mêmes fonctions que les filtres passifs, mais en remplaçant les inductances par des condensateurs. De plus, ils peuvent amplifier le signal.
Ils sont moins encombrants, plus faciles à réaliser et donc moins coûteux. Par contre ils ne sont pas utilisables avec des signaux de fréquences trop élevées le maximum pratique étant de quelques mégahertz.
Les composants actifs nécessitent une source d'alimentation, introduisent du bruit et limitent la tension maximale traitable. Les filtres actifs standards restent difficiles à intégrer dans leur totalité, même si les technologies des chips permettent de réaliser résistances, condensateurs, car ils requièrent des valeurs très précises pour certains composants comme les.



3.3 Filtres à capacités commutées

Les filtres actifs sont difficilement intégrables à cause des résistances. La solution est venue des filtres à capacités commutées qui permettent la réalisation de filtres d'ordre élevé sans comporter de résistances et capacités externes. De plus sa fréquence de coupure est ajustable, elle est proportionnelle à l'horloge de commutation.
Ils ont fait leur apparition au début des années 1980, pour les centraux et modems téléphoniques.



3.4 Filtres numériques

Ils traitent un signal digitalisé et peuvent être :
- câblés en circuits logiques
- programmés en logiciels et exécutés sur un processeur

Les filtres numériques sont totalement intégrables, souples et performants. Chaque fois que cela est possible, c'est maintenant le type de filtre utilisé en priorité. Ils ne s'appliquent pas lorsque les fréquences à filtrer sont trop élevées, si la consommation visée doit être faible, ou si les puissances en jeu sont moyennes ou élevées.
De plus, ils nécessitent presque toujours en amont un préfiltrage du signal analogique avant sa numérisation pour éliminer les repliements de spectre, et en aval un lissage par filtrage du signal analogique reconstitué.

Exemple :

Filtre de répartition numérique de concert
dans de nombreux systèmes professionnels, les filtres de répartition sont maintenant numériques, c'est-à-dire implantés dans des DSP (Digital Signal Processor).
Il est non seulement possible de transposer et réaliser efficacement les filtres analogiques (ces appareils proposent des filtres d'ordre 8, soit avec une pente d'atténuation de 48 dB/oct.), mais également d'y associer tout traitement du signal (égalisation, délai, etc.) utile au réglage précis d'un système de sonorisation.

Prix : 4000$

Un filtrage numérique fait donc appel à des algorithmes, on peut aussi en trouver par exemple dans le traitement d'images.

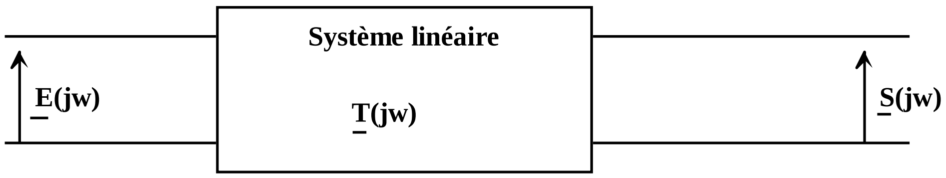
exemple : Application d'un filtre pour la détection de contours

3.5 Synthèse

type	Composants	Spécificités
Filtres Passifs	R, L et C	Fréquence élevée Pas d'alimentation Pas intégrables
Filtres actifs	ALI, R, L et C.	Fréquence < 1MHz Une alimentation Tensions d'entrée limitées
Filtres à capacités commutées	ALI, interrupteur commandé MOS, R et C intégrés.	Fréquence < qq MHz Une alimentation Intégrables La fréquence est programmable
Filtres numériques	Circuits intégrés programmable.	F<100MHz Signaux discrets (nécessité de CNA, CNA) programmable

4 CARACTERISATION

4.1 Transmittance ou fonction de transfert



Fonction de transfert ou transmittance complexe du système: $\underline{T}(j\omega) = \dfrac{\underline{S}(j\omega)}{\underline{E}(j\omega)}$

L'analyse fréquentielle permet de connaître la réponse du système à une excitation sinusoïdale, dont la fréquence balaye le domaine d'emploi du système. On s'intéresse donc au comportement fréquentiel du système, en déterminant l'évolution du module et de l'argument de la fonction de transfert lorsque ω varie de 0 à l'infini.

Les grandeurs d'entrée et de sortie peuvent être de différentes natures :

- S'il s'agit de deux tensions, ce qui est classique dans un filtre, la transmittance $\underline{T}$ est sans unité.
- Pour l'étude d'un système bouclé de type asservissement de vitesse, $\underline{E}$ est une tension, $\underline{S}$ une vitesse de rotation par exemple.

Pour retrouver la fonction de transfert d'un filtre, on utilisera toutes les lois classiques apprises précédemment (pont diviseur de tension, Millman,….) mais en travaillant avec les grandeurs complexes.

La transmittance $\underline{T}_{(j\omega)}$ (ou $\underline{H}_{(j\omega)}$) représente une grandeur complexe, qui possède donc un module et un argument lesquels dépendent de la pulsation ω du signal d'entrée.

Le module $\left\|\underline{T}_{(j\omega)}\right\|$ est appelé Amplification noté T_o (ou H_o) . - l'argument $\phi_{(\omega)}$ est appelé phase (en ° ou rad).

Au lieu de travailler avec l'amplification, on préfère travailler avec le gain exprimé en décibel (dB).

Le gain G s'exprime par : $\boxed{G_{(\omega)} = 20.\log\left\|\underline{T}_{(j\omega)}\right\|}$

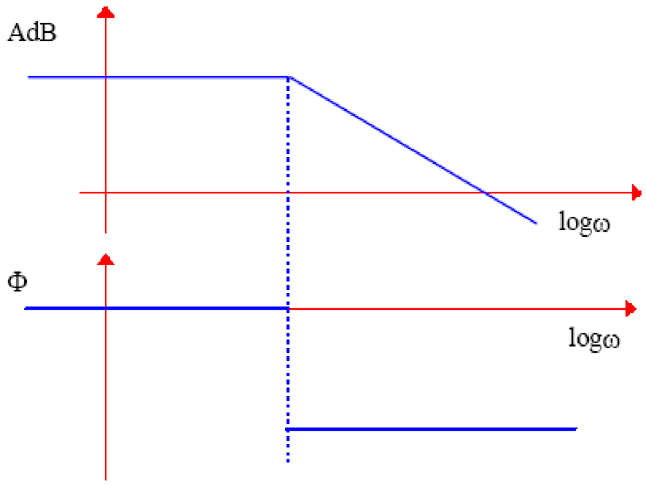
4.2 Diagramme de Bode : représentation de la transmittance

La fonction de transfert peut être représentée par différents types de graphiques appelés lieux de transfert.

Nous nous limiterons dans un premier temps aux diagrammes de Bode, composées de deux courbes :

- la courbe de gain qui indique le rapport de la grandeur de sortie par rapport à la grandeur d'entrée en dB
- la courbe de phase qui indique le déphasage de la grandeur de sortie vis à vis de l'entrée

Le diagramme de Bode est une représentation graphique permettant de tracer les variations du gain $G_{(\omega)}$ et de la phase $\phi_{(\omega)}$ en fonction de la pulsation ω.



Ces courbes peuvent être réalisés expérimentalement ou à partir d'un calcul théorique.
L'échelle horizontale est le $\log_{10}$ de la pulsation.

La position w = 0 est donc non représentée, et le domaine possible de représentation est très étendu.
Un rapport d'une décade correspond à un rapport de 10 en pulsation. Un rapport d'une octave correspond à un rapport de 2 en pulsation.

Pour les systèmes électriques, il est usuel de représenter w variable dans un large domaine de 3 à 4 décades.

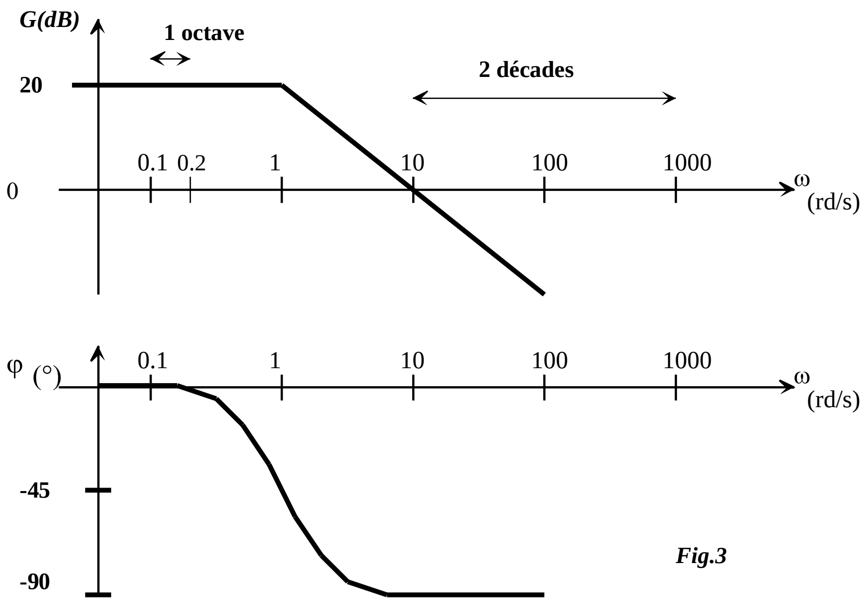


Fig.3

L'axe des ordonnées est gradué en Décibel pour la courbe de gain et en degrés ou radians pour la phase.

Un gain unité donc égal à 1 correspond alors à 0dB.

Les angles multiples de 45° sont notés pour la phase.

$$G_{dB} = 20.\log\left|\underline{T}(j\omega)\right|$$

$$\varphi = Arg(\underline{T}(j\omega))$$

Exemples de calcul de Vs/Ve en fonction de la pulsation :

4.3 Bande passante

La bande passante d'un filtre caractérise la bande de fréquence qui n'est pas éliminée en sortie d'un filtre. Elle est définie par une borne inférieure et une borne supérieure.

BANDE PASSANTE à -3dB

La bande passante à -3dB, est la zone de fréquence pour laquelle on a un gain G supérieur ou égal à G_{max}-3dB ou bien, un module de la transmittance noté T tel que $T > \frac{T_{\max}}{\sqrt{2}}$

4.4 Atténuation

L'**atténuation** est la réduction de l'amplitude du signal de sortie. La limite de la bande passante est le plus souvent définie pour une atténuation de 3dB.

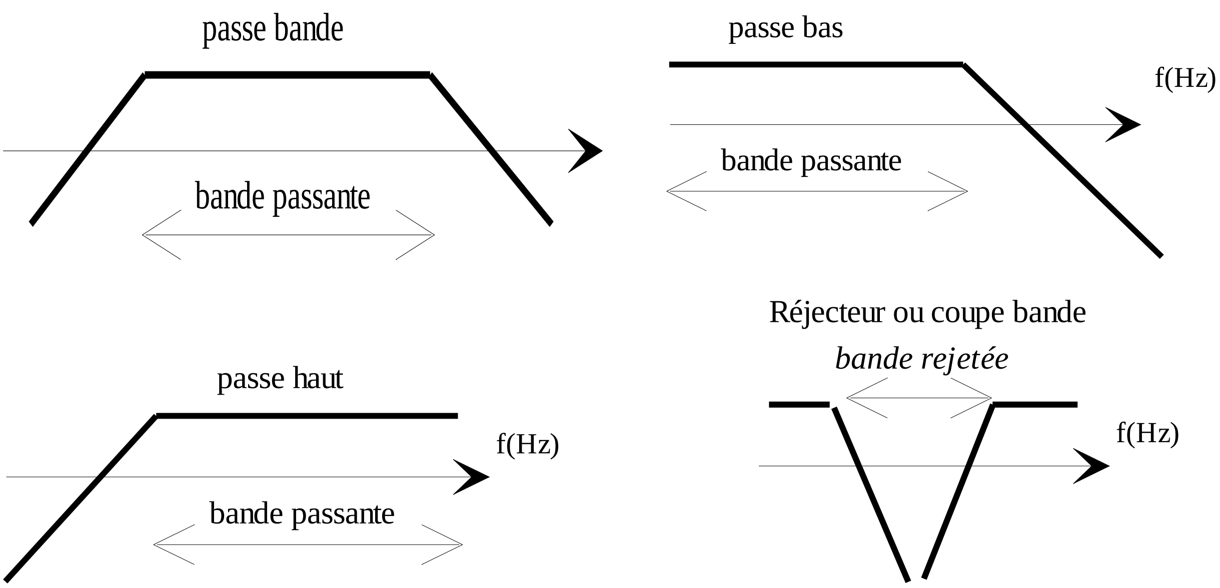
On utilise l'atténuation pour caractériser la sélectivité du filtre en dehors de la bande.

Un filtre qui présente une atténuation de 20dB/décade (notée également 6dB/octave) divisera l'amplitude du signal de sortie par 10 chaque fois que la fréquence est multipliée par 10 (en dehors de la bande passante).

4.5 Types de filtre

Le filtre sera alors caractérise par l'ensemble des pulsations ou fréquences qu'il laisse passer (la bande passante).

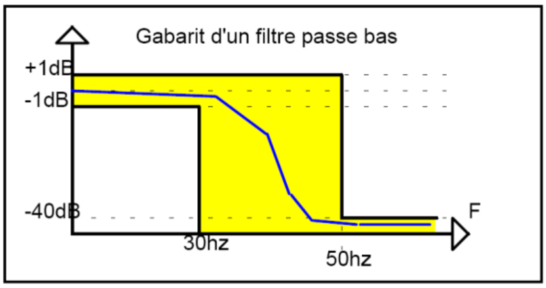
- **Un filtre passe bas** laisse passer les pulsations inférieures à une pulsation ω_c.
- **Un filtre passe haut** laisse passer les pulsations supérieures à une pulsation ω_c.
- **Un filtre passe bande** laisse passer les pulsations comprises entre ω_{c1} et ω_{c2}
- **Un filtre coupe bande ou réjecteur de bande** laisse passer les pulsations inférieures à ω_{c1} et supérieures à ω_{c2}.



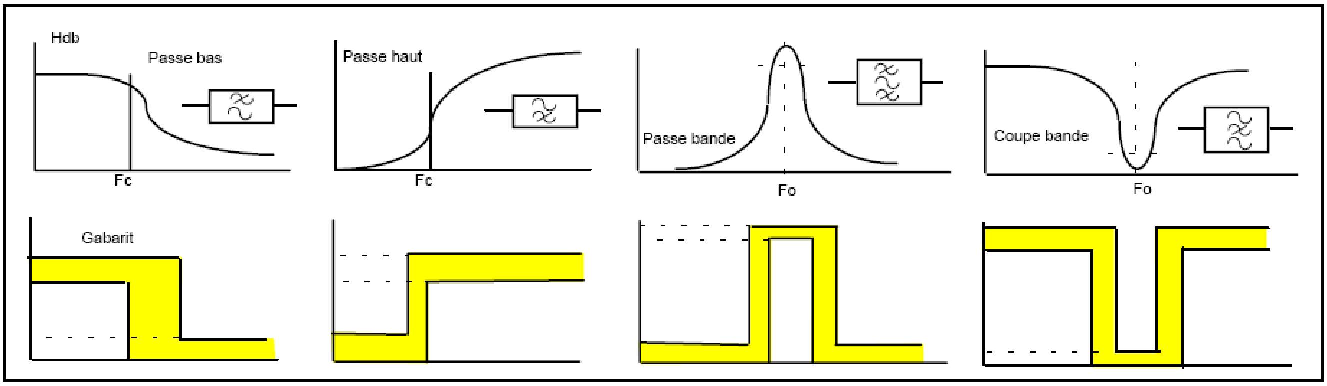
5 GABARIT D'UN FILTRE

Un filtre est utilisé pour éliminer certaines fréquences dans un signal, mais cette élimination n'est jamais totale car le filtre idéal n'existe pas. On définit alors un gabarit, qui devient le cahier des charges de réalisation du filtre.

Exemple :
Un signal à 30 Hz, bruité par son environnement 50 Hz (transformateur ou câbles d'alimentation à proximité).
On définit une contrainte de ±1 db dans la bande passante, et une atténuation de 40dB pour toutes les fréquences du secteur.
Le Gabarit est alors défini par

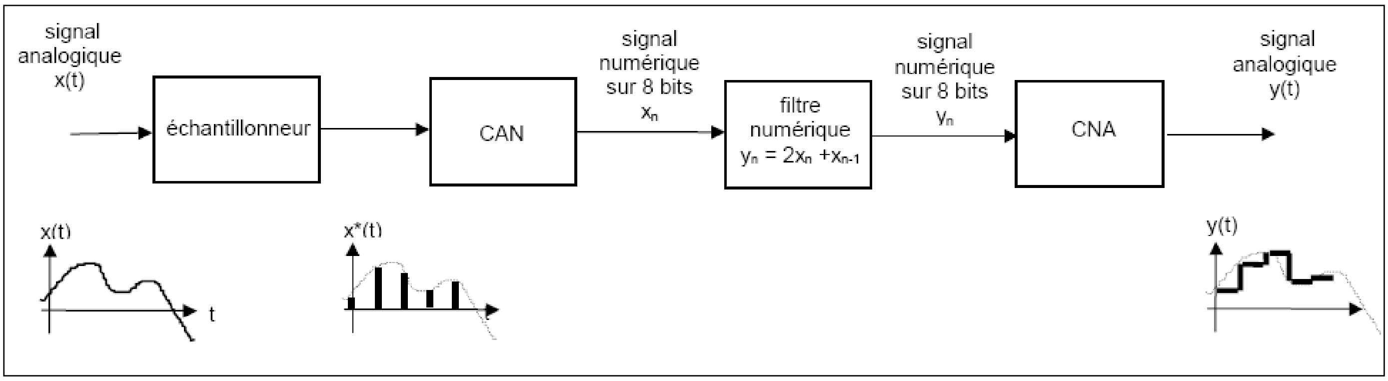


Exemples de gabarit



6 FILTRAGE NUMERIQUE

La réalisation des filtres fait de plus en plus souvent appel aux techniques numériques.
Très succinctement, il s'agit d'échantillonner le signal analogique d'entrée Ve(t), on dispose donc de Ve(t) aux instants nTe, où Te est la période d'échantillonnage, et on fait subir à ces échantillons une transformation mathématique.



Prenons le cas par exemple du filtre passe-bas de premier ordre,
L'équation différentielle régissant le fonctionnement de ce filtre est

$$\boxed{V_{e(t)} = V_{(t)} + R.C.\frac{dV_s}{dt}}$$

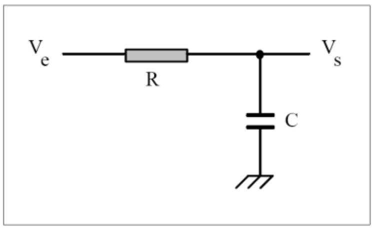


Fig. 1 Filtre analogique passe-bas du premier ordre

à l'équation différentielle précédente on fait correspondre une équation aux différences finies de la forme : $\boxed{V_{e(n.T_e)} = V_{(n.T_e)} + R.C.\frac{V_{s(n.T_e)} - V_{s((n-1).T_e)}}{T_e}}$

On obtient la relation de récurrence suivante permettant de calculer le nième terme de Vs connaissant le (n-1)ième terme et le nième terme de Ve.

$$\boxed{V_{s(n.T_e)} = \left[\frac{RC}{T_e + RC}\right] V_{s((n-1).T_e)} + \left[\frac{T_e}{T_e + RC}\right] V_{e(n.T_e)}}$$

La relation de récurrence permet de créer ensuite l'algorithme du filtre et de le programmer.