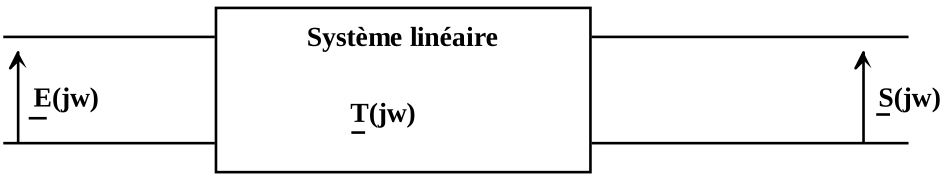
Comment tracer les Diagrammes de Bode ?

Table des matières

1 INTERET DES DIAGRAMMES DE BODE

1.1 Définition



Fonction de transfert ou transmittance complexe du système: $\underline{T}(j\omega) = \dfrac{\underline{S}(j\omega)}{\underline{E}(j\omega)}$

Pour retrouver la fonction de transfert d'un filtre, on utilisera toutes les lois classiques apprises précédemment (pont diviseur de tension, Millman,….) mais en travaillant avec les grandeurs complexes.

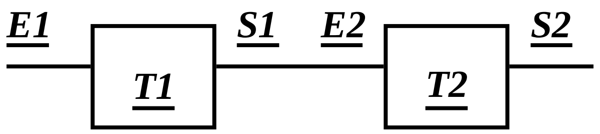
La transmittance $\underline{T}_{(j\omega)}$ (ou $\underline{H}_{(j\omega)}$) représente une grandeur complexe, qui possède donc un module et un argument lesquels dépendent de la pulsation ω du signal d'entrée.

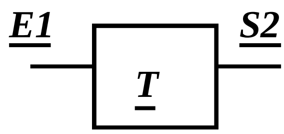
Le module $\left\|\underline{T}_{(j\omega)}\right\|$ est appelé Amplification noté T_o (ou H_o) . - l'argument $\phi_{(\omega)}$ est appelé phase (en ° ou rad).

Au lieu de travailler avec l'amplification, on préfère travailler avec le gain exprimé en décibel (dB).

Le gain G s'exprime par : $\boxed{G_{(\omega)} = 20.\log\left\|T_{(j\omega)}\right\|}$

1.2 Intérêt de ces diagrammes





Cette représentation permet de remplacer le gain du produit de plusieurs transmittances (cas de systèmes cascadés), par une somme des gains de chaque transmittance :

soit $\underline{T} = \underline{T_1}.\underline{T_2}$ et $G_{1dB} = 20.\log\left|\underline{T_1}(j\omega)\right|$ $G_{2dB} = 20.\log\left|\underline{T_2}(j\omega)\right|$

alors $G_{dB} = 20.\log\left|\underline{T_1}.\underline{T_2}\right| = 20.\log\left|\underline{T_1}\right|.+20.\log\left|\underline{T_2}\right|. = G_{1dB} + G_{2dB}$

Pour l'argument il en est de même, puisque : $Arg(\underline{T}) = Arg(\underline{T_1}.\underline{T_2}) = Arg(\underline{T_1}) + Arg(\underline{T_2})$

Les avantages de cette représentation sont :

- Continuité des valeurs du gain et du déphasage en fonction de la pulsation.
- Si on fait le produit de deux nombres complexes, les deux courbes de gain s'ajoutent ainsi que les deux courbes de phase.

Les deux asymptotes de la courbe de gain (en basses pulsations et en hautes pulsations) sont dans tous les cas des demi-droites.
Comment tracer des asymptotes ?

Il suffit de chercher les limites de G et de φ quand ω tend vers 0 et ω tend vers ∞.

2 TRACES DES FONCTIONS ELEMENTAIRES DU 1ER ORDRE :

On entend par fonctions élémentaires, les formes de fonctions de transfert les plus habituelles, notées sous formes normalisées ou canoniques, elles sont de la forme :

$$\frac{K}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{ou} \quad j\frac{\omega}{\omega_c} \quad \text{ou} \quad K(1+j\frac{\omega}{\omega_c})$$

Un système du premier ordre appartient toujours à l'une de ces quatre formes. (rapport $\frac{\omega}{\omega_c}$ est sans dimensions).

Ceci permet d'avoir toujours la même représentation quelle que soit ωc, on parle de représentation normalisée.

- **K est le gain statique du système pour ω = 0.**
- **ωc est la pulsation de coupure également appelée pulsation de cassure. La fréquence fc est la fréquence de coupure.**

Pour les fonctions de transfert d'ordre supérieur, il est souvent possible d'établir une écriture sous forme de produit de ces fonctions élémentaires du premier ordre et donc d'additionner les courbes comme vu plus haut.
Le tracé asymptotique d'une fonction de transfert du premier ordre se fait pour les trois cas:

w<<wc w=wc w>>wc

Si on veut un tracé plus précis , on prend plus de points, notamment autour de ωc.

2.1 Exemple 1 :

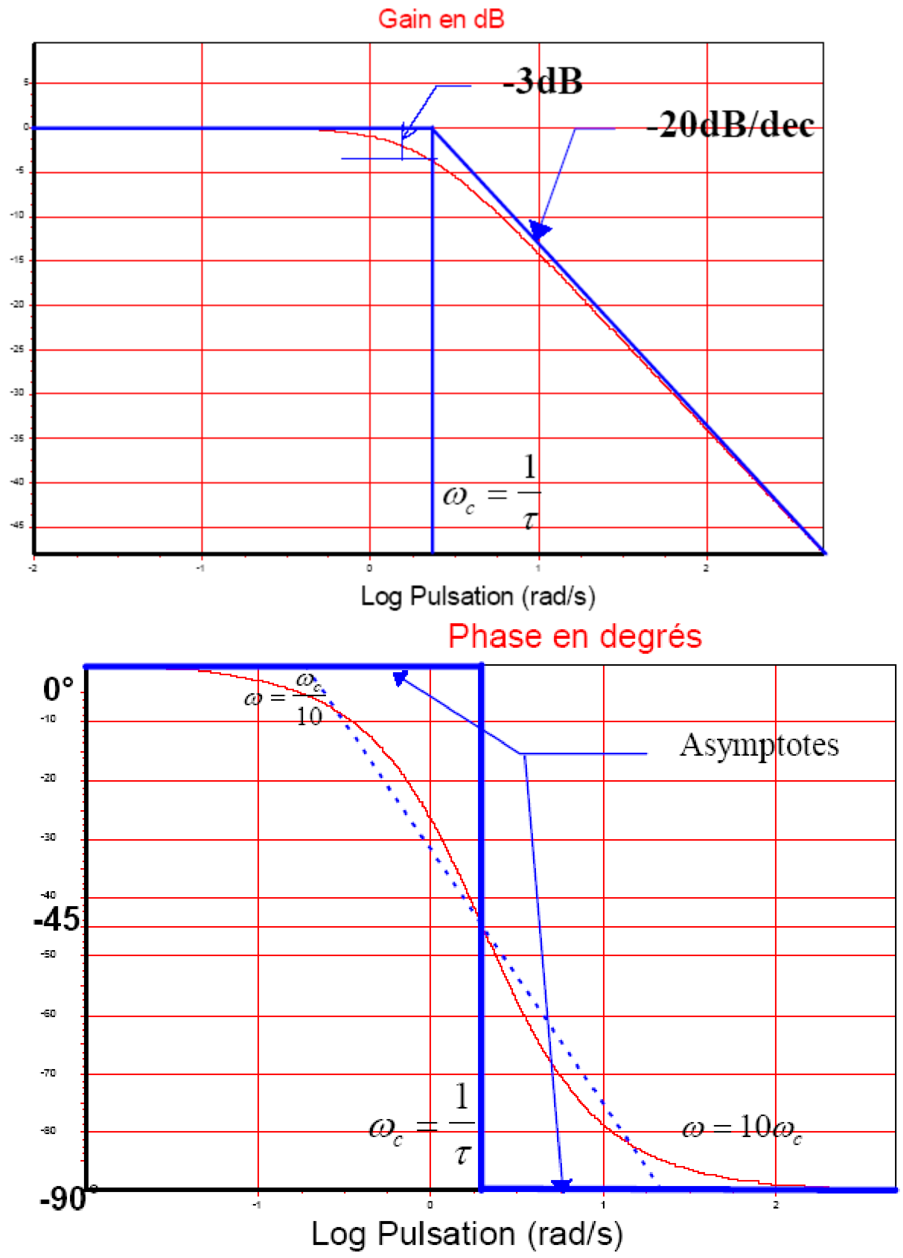
Transmittance : $H(j\cdot\omega) = \frac{K}{1+\tau\cdot j\cdot\omega}$

Gain G(ω) = A(ω) $A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1+\tau^2\cdot\omega^2}}$

Phase $\Phi(\omega) = -arctg(\tau\cdot\omega)$

Pour un premier ordre :

- **la pente des asymptotes du gain en dB subit des variations de +/- 20dB/dec aux pulsations de coupure.**
- **Les asymptotes de phase font des sauts de +/- 90° aux pulsations de coupure**
- **+20 dB/dec et +90° si le premier ordre est au numérateur de la fonction de transfert**
- **-20 dB/dec et -90° si le premier ordre est au dénominateur de la fonction de transfert**

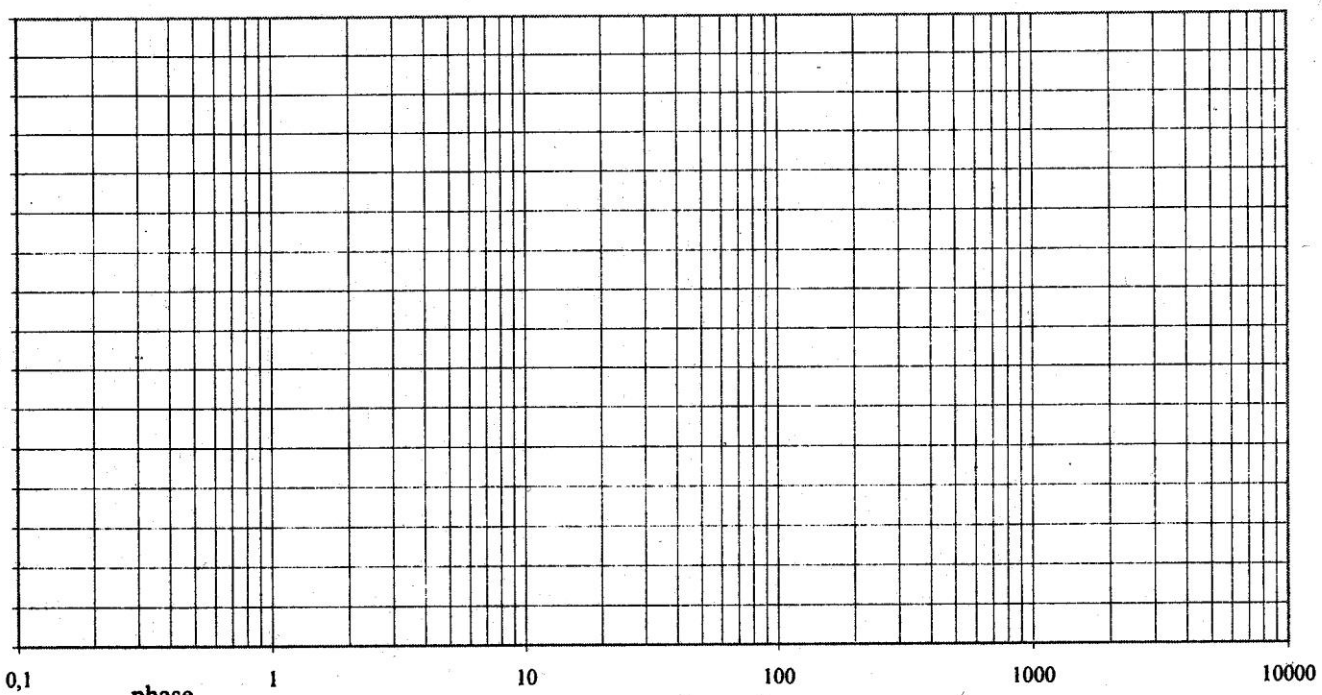


2.2 Exemple 2 :

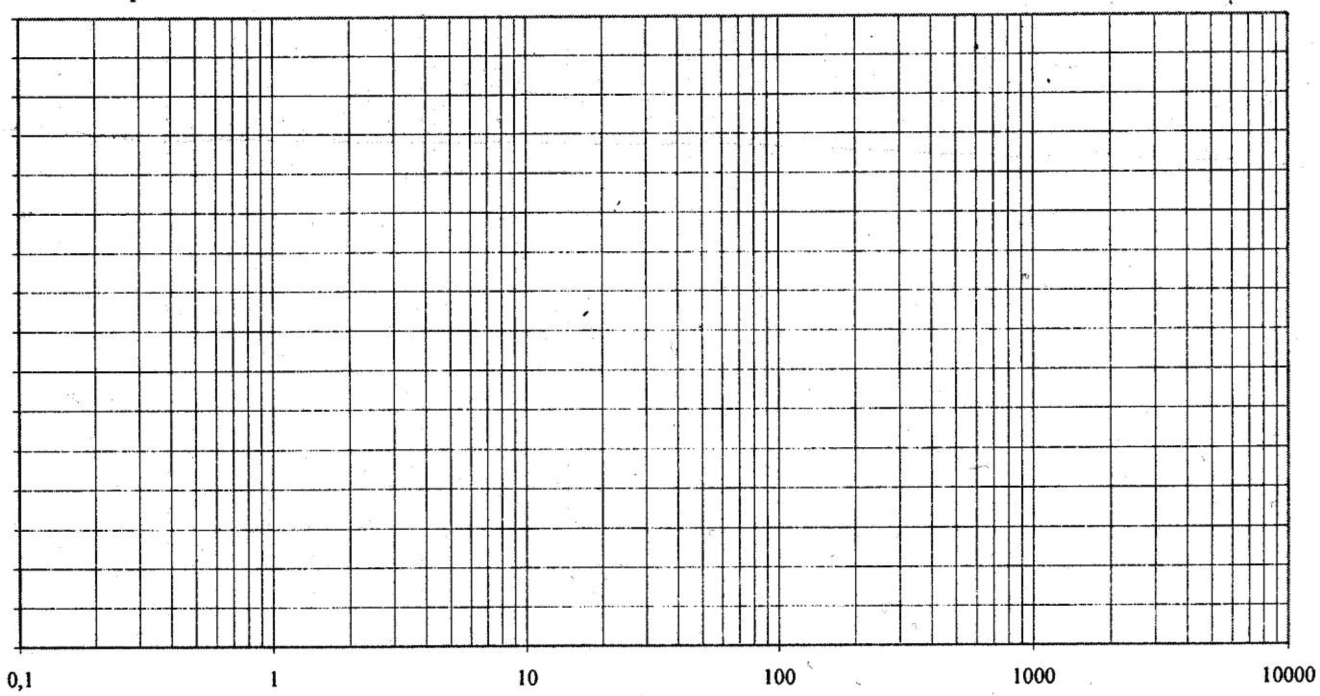
Tracer rapidement les représentations de Bode asymptotiques, de l'ensemble des fonctions de transfert du premier ordre pour K = 10 et wc = 100 rd/s. Représenter le diagramme de Bode sur papier semi logarithmique.

a) $\dfrac{K}{1+\dfrac{j\omega}{\omega c}}$ b $K(1+\dfrac{j\omega}{\omega c})$ c) $\dfrac{1}{j\dfrac{\omega}{\omega c}}$ d) $j\dfrac{\omega}{\omega c}$

module



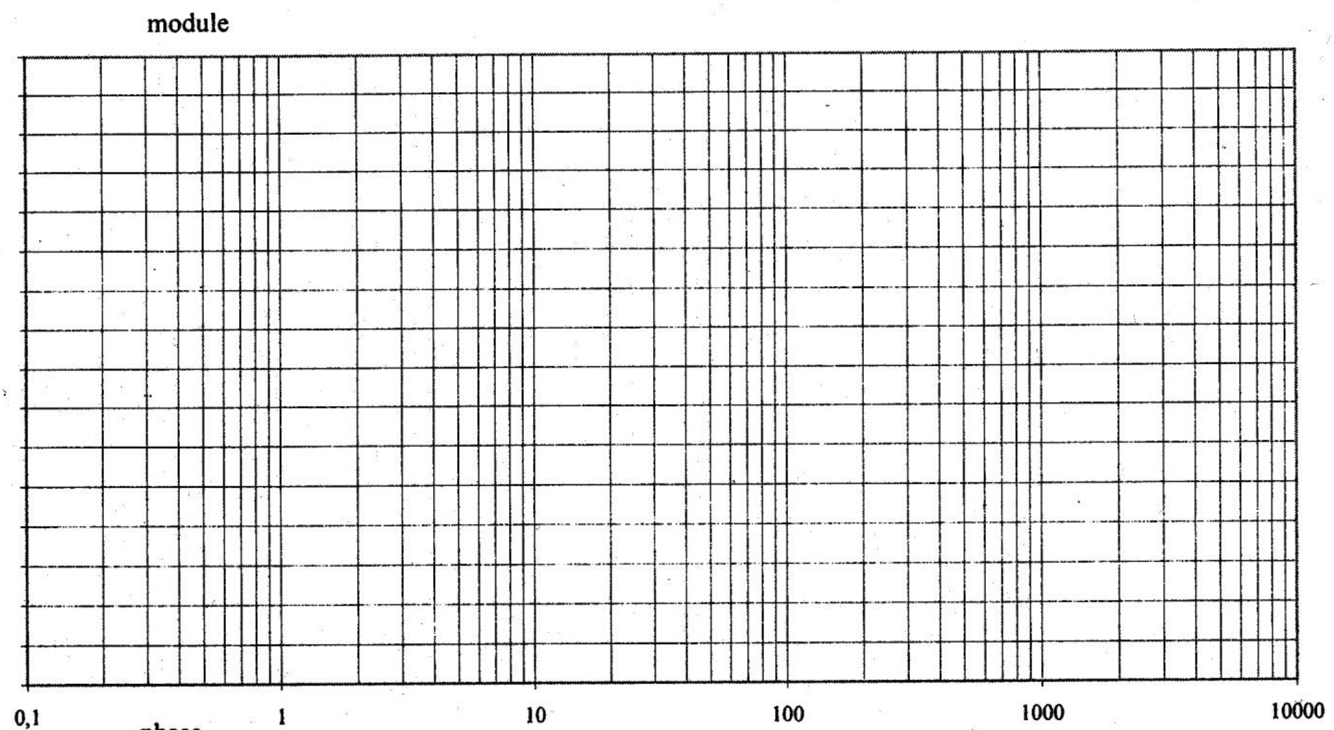
phase

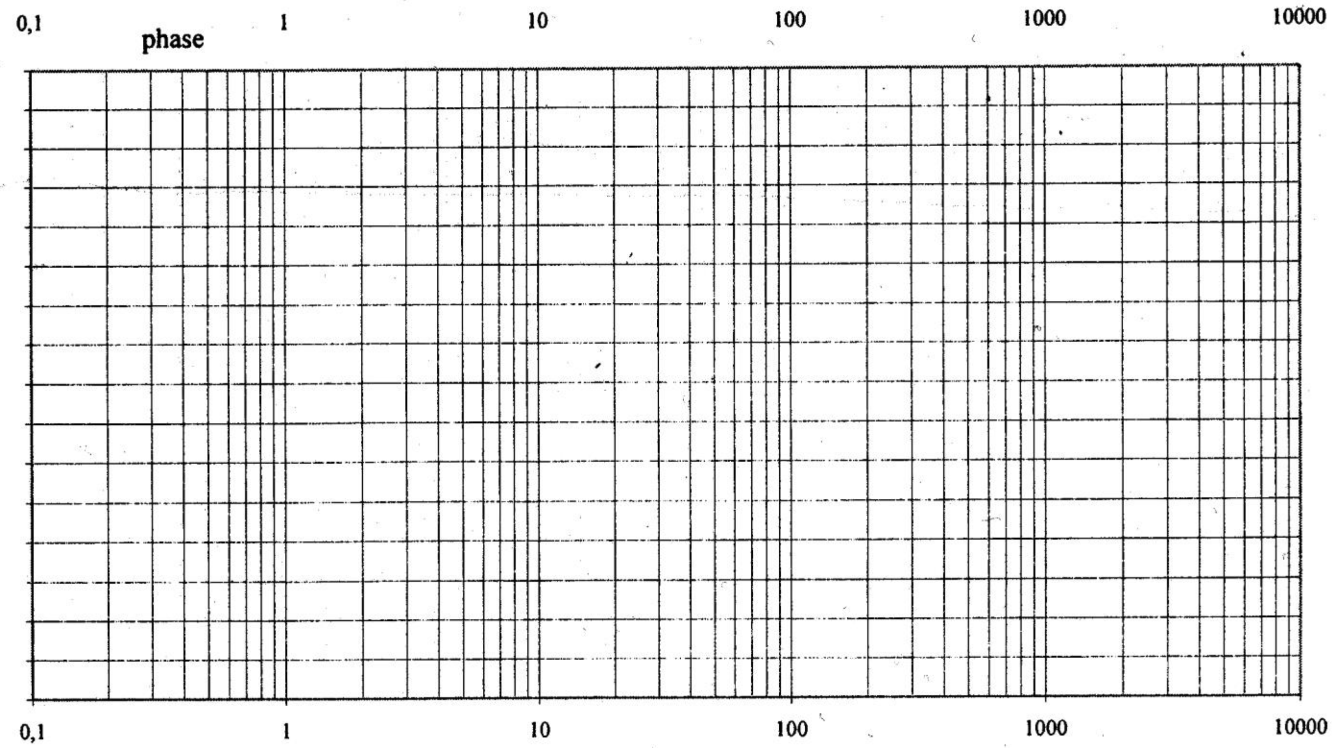


2.3 Exemple 3

$$H(j\omega) = \frac{20.(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_{c1}})}{(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_{c2}}).(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_{c3}})}$$

Avec w_{c1}= 100 rd/s ; w_{c2}= 10 rd/s ; w_{c3}= 500 rd/s



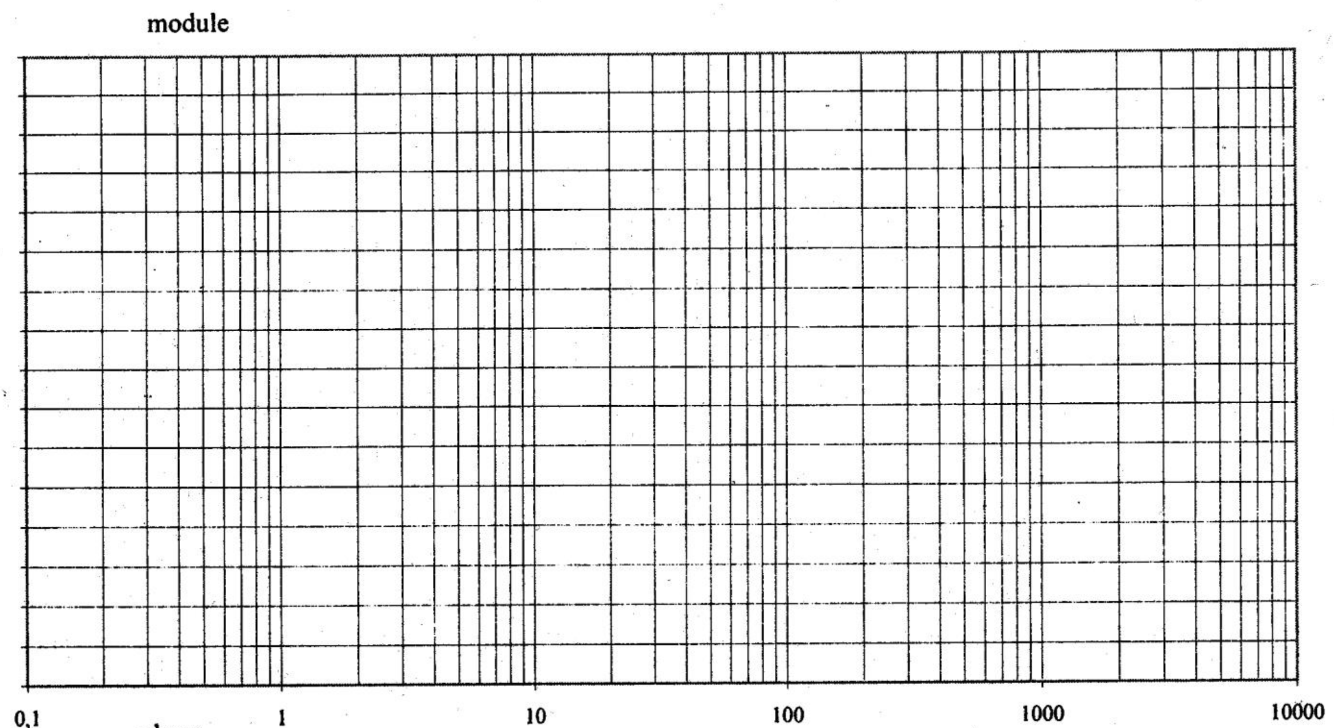


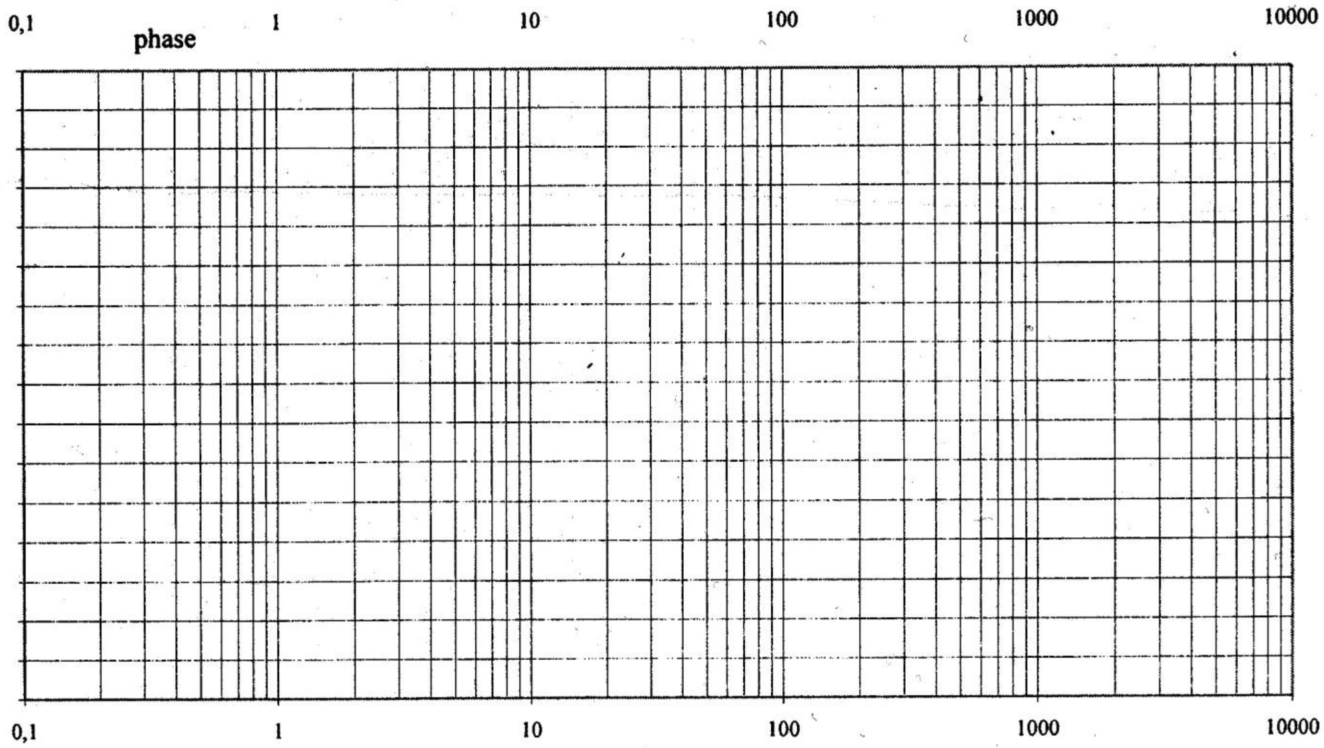
2.4 Exemple 4

$$H(j\omega)=\frac{20.(j\dfrac{\omega}{\omega_{c1}})}{(1+j\dfrac{\omega}{\omega_{c2}}).(1+j\dfrac{\omega}{\omega_{c3}})}$$

Avec w_{c1}= 100 rd/s ; w_{c2}= 10 rd/s ; w_{c3}= 500 rd/s

ω


module
0,1
1
10
100
1000
10000


phase
0,1
1
10
100
1000
10000

3 TRACES DES FONCTIONS DU 2^{ND} ORDRE , RESONANCE

3.1 Définition

Les systèmes dits "du second ordre", doivent être traités en introduisant deux caractéristiques extrêmement importantes, ω_0 et m.

- **ω_0 en rd/s est la pulsation propre** (correspond à la pulsation de résonance du système en l'absence de pertes.)
- **m** (ou z ou s) coefficient sans dimension est le **coefficient d'amortissement** (représentatif des pertes dans le circuit, m = 0 s'il n'y a pas d'élément de perte, par exemple, résistance R = 0 dans un circuit électrique ou frottement f = 0 dans un système mécanique.)

Prenons le cas d'un système du second ordre amorti de pulsation ω de type passe bas.

On cherche la fonction de transfert du système définie par : $\underline{H} = \dfrac{\underline{S}}{\underline{E}}$, où $\underline{E}$ et $\underline{S}$ sont les grandeurs complexes associées, E en entrée et S en sortie.

D'où : $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + j2m\dfrac{\omega}{\omega_0} + (\dfrac{j\omega}{\omega_0})^2}$.

On a alors : $G(\omega) = \dfrac{H_0}{\sqrt{(1-\dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2})^2 + (2m\dfrac{\omega}{\omega_0})^2}}$ et $\phi(\omega) = -\arctan(\dfrac{2m.\omega.\omega_0}{{\omega_0}^2 - \omega^2})$.

La possibilité d'obtention d'une résonance (c'est-à-dire une surtension), parfois très aiguë, existe si le coefficient d'amortissement m est faible ($m < \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0,7$).

$|H|_{max}$ est alors obtenu pour la pulsation de résonance ωr vérifiant l'équation :

$\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2m^2}$ et avec : $|H|_{max} = \dfrac{H_0}{2m\sqrt{1-m^2}}$.

On remarquera que pour de faibles valeurs de m, les valeurs de ω0 et ωr se confondent.
Hmax est aussi appelé Q facteur de surtension.

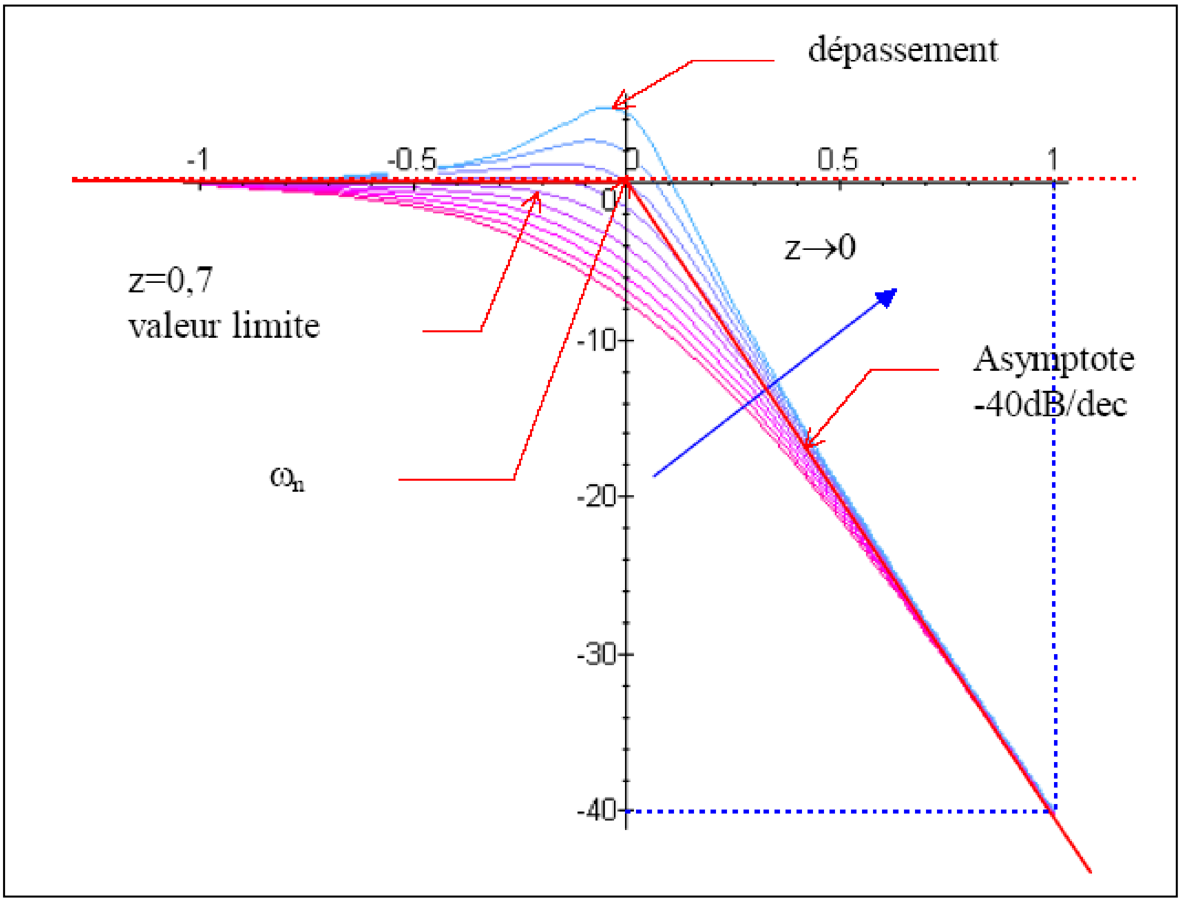
La surtension en dB est alors par rapport au gain statique

$$G(dB) = 20\log\frac{|H_{max}|}{H_o} = 20\log\frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$$

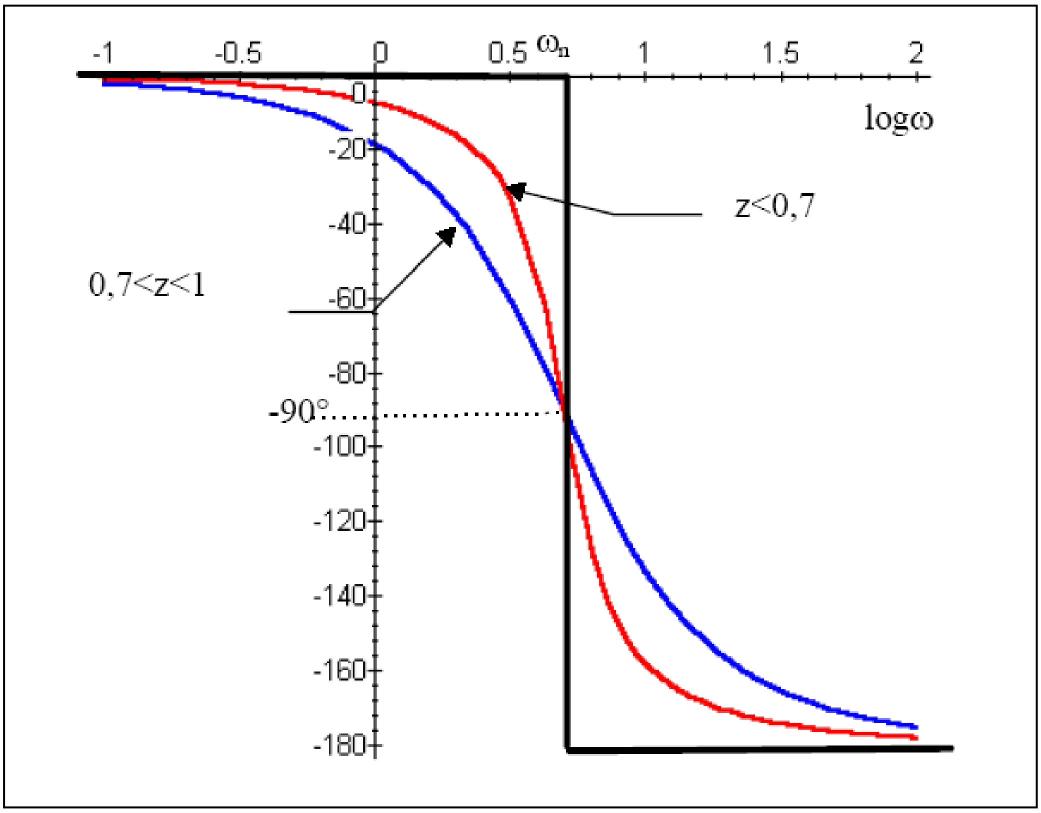
Une valeur usuelle de réglage d'un asservissement est Q dB=2,3dB.

Pour les asymptotes, les pentes sont doubles de celles du 1er ordre, donc +/- 40 dB/dec et +/- 180.°

Allure générale du diagramme d'amplitude :



Allure de la phase si m<1 (deux racines complexes conjuguées)



Dans le cas où m > 1, cas il est préférable d'étudier le système comme le produit de deux systèmes du 1er ordre :

$$H(j\cdot\omega)=\frac{K}{(1+j\cdot\tau_1\cdot\omega)(1+j\cdot\tau_2\cdot\omega)}$$

Diagramme de gain
ωn = ω0
pulsation naturelle

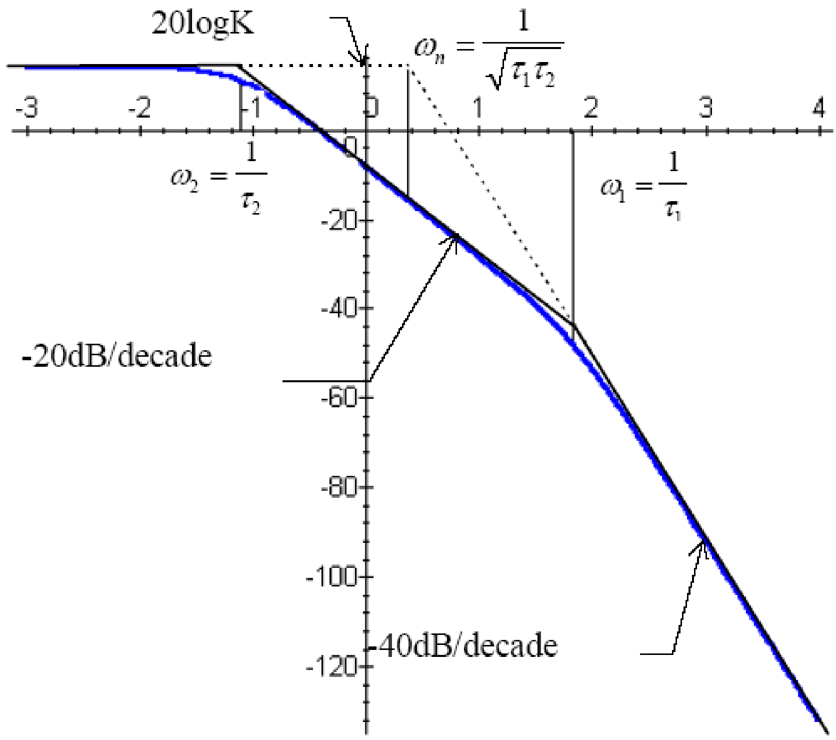
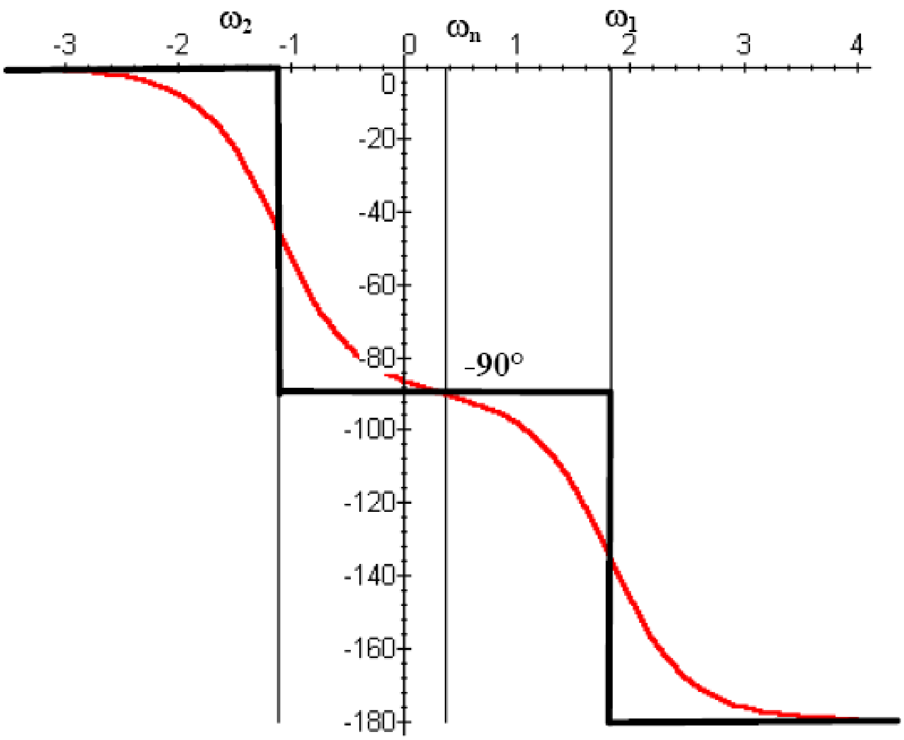


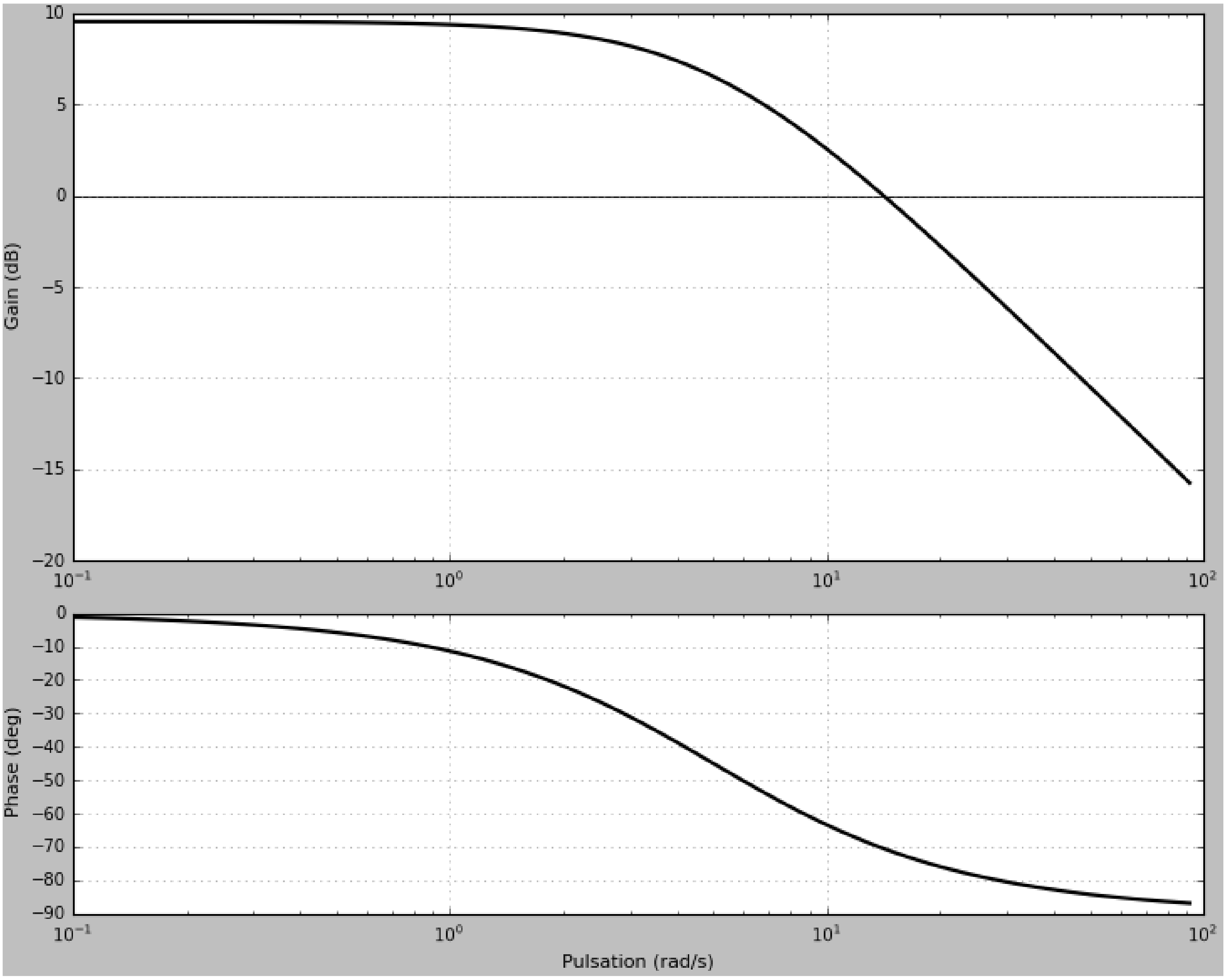
Diagramme de phase



3.2 Exemple

4 LIRE UN DIAGRAMME DE BODE

4.1 Exemple :



Retrouver les valeurs de phase, de gain en dB puis de gain pour des pulsations de 1 rad/s ; 5 rad/s ; 10 rad/s ; 80 rad/s

4.2 Recherche de Vs(t) si ve(t)=5.sin(wt) dans chaque cas

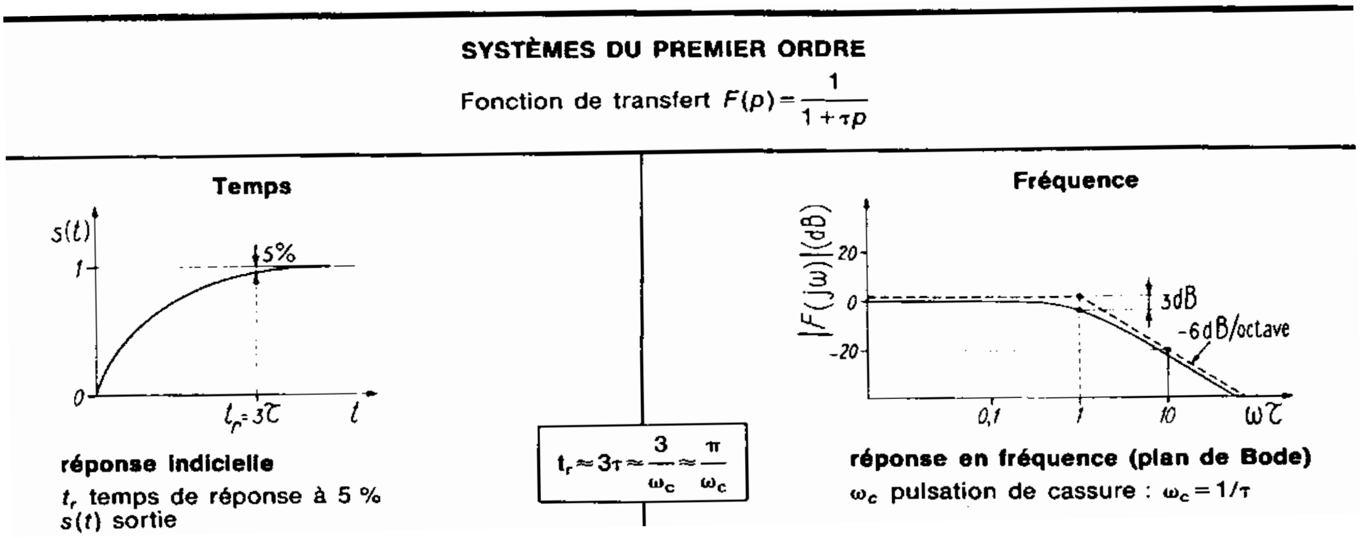
5 EQUIVALENCE TEMPS FREQUENCE

Tout système linéaire donne une réponse fréquentielle ou temporelle correspondant à la somme de réponses élémentaires du premier et second ordre. L'essentiel de la réponse dépend du **mode dominant**, c'est-à-dire **le plus lent,** qui est du premier ou second ordre, si bien qu'un système, même d'ordre élevé, peut être apparenté aux caractéristiques d'un système d'ordre 1 ou 2. On s'appuie ici sur les systèmes de type passe bas.

5.1 Premier ordre :

La caractéristique essentielle, observable expérimentalement, est **la constante de temps** τ
Le temps de réponse à 5% est obtenue ou bout de 3 τ **celui à 1% au bout de 5** τ **.**

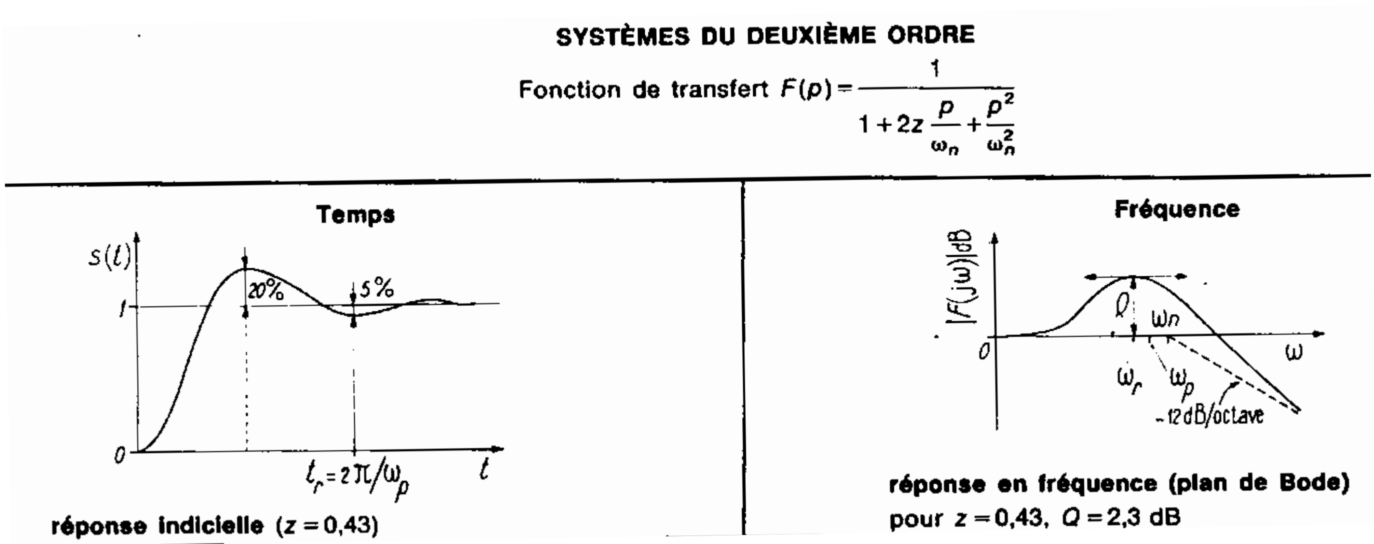
On utilise la **pulsation de coupure** $\omega_c = \dfrac{1}{\tau}$ pour la représentation fréquentielle.



5.2 SECOND ordre :

Pour ce type de système deux caractéristiques primordiales, observables expérimentalement, interviennent :

- la pseudo-pulsation ωpa ne pas confondre avec ω0 = pulsation propre
- le coefficient d'amortissement m ou z .



On peut donc à partir de la réponse impulsionnelle et de la réponse fréquentielle définir plusieurs caractéristiques pour les systèmes du second ordre :

	Pulsation de cassure	Pseudo-pulsation	Pulsation de résonance	Réponse impulsionnelle
m>1	2 pulsations de cassure	Pas d'oscillation	Pas de résonance	Apériodique
m=1	1 seule pulsation de cassure $\omega_c = \omega_0$	idem	Idem	Critique
$\frac{1}{\sqrt{2}} < m < 1$	$\omega_c = \omega_0$	$\omega_{pa} = \omega_0\sqrt{1-m^2}$	idem	Oscillatoire amortie
$m \leq \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7$	$\omega_c = \omega_0$	$\omega_{pa} = \omega_0\sqrt{1-m^2}$	$\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2m^2}$	Oscillatoire amortie avec résonance