ASSERVISSEMENT

DES SYSTEMES LINEAIRES CONTINUS ET INVARIANTS

CONTENU

1. DEFINITIONS

1.1. Automatique

Système automatique : Un système automatique est un système dont les éléments le constituant se coordonnent entre eux pour réaliser des actions simples ou complexes.

Les systèmes automatiques permettent généralement :

- De réaliser des tâches trop complexes ou dangereuses pour l'homme,

(*robot d'exploration utilisé à Fukushima)*

- De substituer la machine à l'homme,

(*la « Google car » : véhicule sans conducteur)*

- D'accroître la précision.

(*Robot chirurgical intra-crânien)*

Automatique : L'automatique est la discipline scientifique traitant, d'une part, de la caractérisation des systèmes automatiques et d'autre part, du choix de la conception et de la réalisation du système de commande afin d'obtenir, en sortie du système, le comportement attendu.

1.2. Classification des systèmes automatiques

Les systèmes automatiques sont classés en fonction de la nature de leurs informations de commande et de mesure. On distingue deux types de grandeurs : **analogique** et **discrète**.

grandeur analogique[1]
Une information analogique peut prendre, de manière continue, toutes les valeurs possibles dans un intervalle donné. Un signal analogique peut être représenté par une courbe continue.

grandeur discrète[2]
Une information discrète est constituée d'un nombre fini de valeurs. On distingue :

• **une information logique** du type « vrai/faux » ou « 0/1 ». Elle est associée à l'état d'une variable qui ne peut prendre que deux valeurs possibles. Ces informations peuvent aussi être appelées des informations binaires (bit) ou « Tout Ou Rien » (TOR).

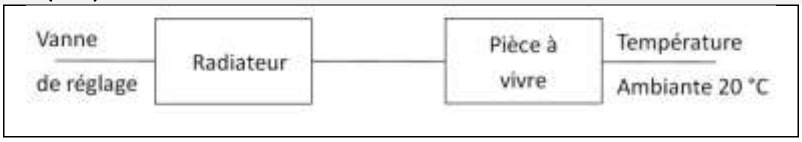
• **une information numérique** sous la forme d'un mot binaire, constitué de plusieurs bits (variables binaires 0/1). Cette information numérique est en général issue du traitement (échantillonnage et codage) d'une information analogique.

Grandeurs discrètes	**Systèmes automatiques à logique combinatoire**	Un signal logique (ou une combinaison de signaux logiques) conduit toujours à un unique état de la sortie du système. Dans ces systèmes, l'information logique est traitée de manière instantanée.
	Systèmes automatiques à logique séquentielle	La sortie du système est élaborée à partir d'un ensemble de signaux logiques d'entrée mais elle prend également en compte la chronologie des évènements logiques.
Grandeurs analogiques	**Systèmes automatiques asservis**[3]	Une mesure du signal de sortie est en permanence réalisée par un capteur et la valeur est comparée à l'entrée. Un correcteur amplifie le signal d'erreur et constitue le signal de commande du système[4].

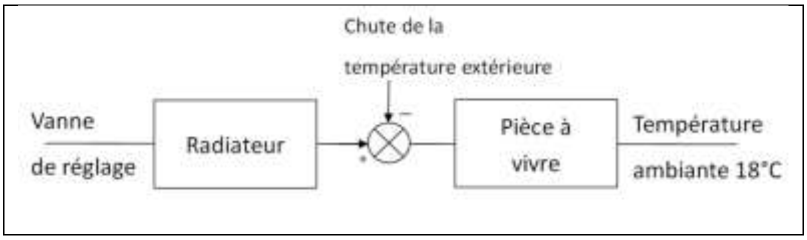
1.3. Système asservi

1.3.1. Système en boucle ouverte (BO)

Exemple du chauffage d'une pièce à vivre, avec un réglage par une vanne manuelle :

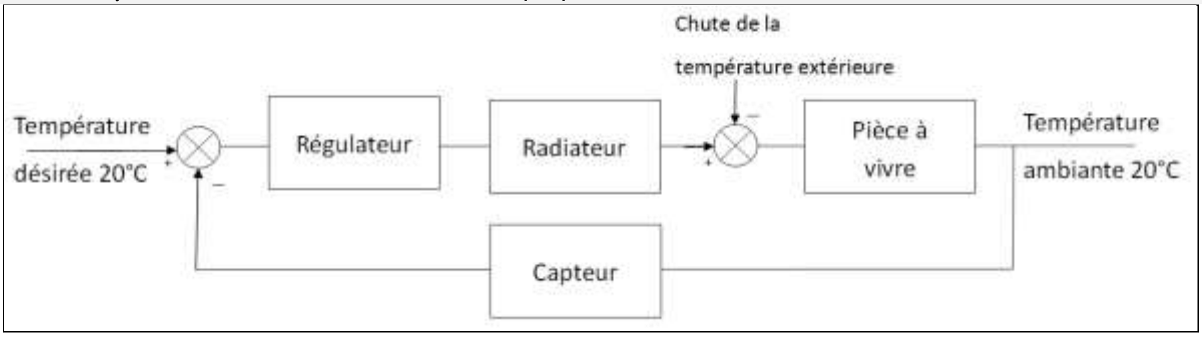


Le système fonctionne très bien… tant que la température extérieure est constante.



La température ambiante va chuter car les pertes dues aux échanges avec l'extérieur à travers les parois ne sont pas compensées : le système n'est pas asservi et nécessite un bouclage.

1.3.2. Système asservi : boucle fermée (BF)



L'ajout d'un régulateur et de son capteur de mesure de la température permet d'assurer une température constante dans la pièce. On a réalisé un asservissement de la température de la pièce.

1.4. Stratégies de commande

Les systèmes asservis peuvent être classés en deux grandes familles par leur stratégie de commande :

Commande en POURSUITE

la consigne d'entrée suit un profil déterminé, comme par exemple pour une machine-outil à commande numérique, un missile, un radar de poursuite ...
L'objectif est d'ajuster en permanence le signal de sortie au signal d'entrée.

Drone militaire : vol à basse altitude, suivi du profil de terrain.

Commande en REGULATION

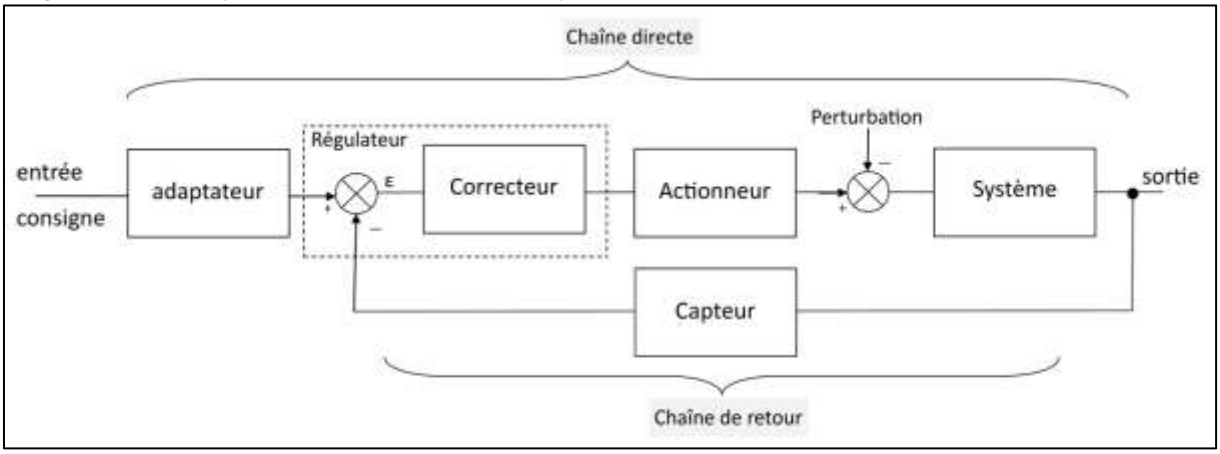
la consigne d'entrée est fixe,
comme par exemple pour une régulation de température, de débit... Pour les systèmes destinés à maintenir une sortie constante pour une consigne d'entrée constante.

Pilote automatique de bateau : maintien de cap

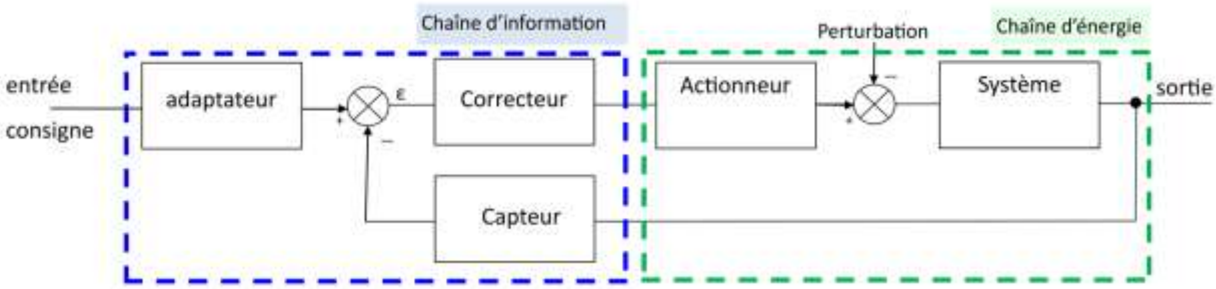
2. FORMALISME

2.1. Organisation

L'organisation d'un système asservi est modélisable par la structure suivante :



Le point de vue adopté est un **point de vue COMMANDE**, mais il concerne le comportement de l'ensemble du système. On retrouve la décomposition CECI (Chaîne d'Energie-Chaîne d'Information).



2.2. Vocabulaire

Consigne	La consigne est l'entrée d'action, c'est la grandeur réglante du système.
Adaptateur	permet d'ajuster l'entrée de consigne au retour capteur, pour comparer deux grandeurs de même nature et de même échelle.
Ecart ε	On appelle écart la sortie du comparateur.
Erreur	On appelle erreur la différence entre la consigne et la sortie.
Régulateur	Le régulateur se compose d'un comparateur qui détermine l'écart entre la consigne et la mesure et d'un correcteur.
Correcteur	Elabore à partir du signal d'erreur l'ordre de commande. Il comporte un amplificateur et des fonctions mathématiques de traitement du signal.
Actionneur	C'est l'organe d'action qui apporte l'énergie au système pour produire l'effet souhaité. Il est en général associé à un pré-actionneur qui permet d'adapter l'ordre (basse puissance) et l'énergie.
Perturbation	On appelle perturbation tout phénomène physique intervenant sur le système qui modifie l'état de la sortie. Un système asservi doit pouvoir maintenir la sortie à son niveau indépendamment des perturbations.
Système	Pluritechnologique, il agit sur son environnement dans le but d'assurer un besoin défini par un cahier des charges et porté par la nature de la sortie.
Capteur	Le capteur prélève sur le système la grandeur réglée (information physique) et la transforme en un signal compréhensible par le régulateur. La précision et la rapidité sont deux caractéristiques importantes du capteur.
Sortie	La sortie régulée représente le phénomène physique que dot régler le système, c'est la raison d'être du système.

2.3. Transformées de Laplace

L'étude des systèmes asservis linéaires invariants est facilitée par l'utilisation des transformées de Laplace ;
Cette transformation permet de passer du domaine temporel (variable en t) vers le domaine symbolique de Laplace (variable en p).

$$f(t) \longrightarrow F(p) = \int_0^\infty e^{-p.t}.f(t).dt$$

• Dans la pratique, **on ne calcule que les transformées de Laplace de fonctions dans les conditions de Heaviside**. Ces fonctions f représentent des grandeurs physiques: intensité, température, effort, vitesse,...
• La variable p peut aussi être noté avec **la lettre s** (anglosaxons).

Conditions de Heaviside

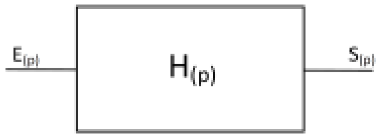
On dit qu'une fonction du temps $f_{(t)}$ vérifie les conditions de Heaviside si elle vérifie : $f(0^+)=0$, $f'(0^+)=0$, $f''(0^+)=0$,...

C'est à dire si les **conditions initiales sont nulles**.
C'est la condition nécessaire pour décrire un système sous la forme de fonction de transfert[6].

2.4. Schéma-blocs

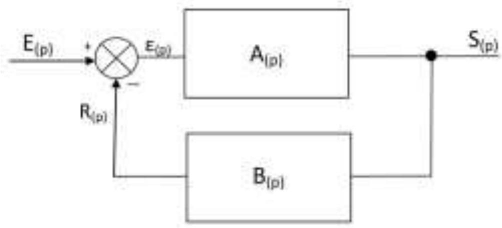
La représentation schéma-bloc met en relation les entrées et sorties du système qui permet de comprendre la structure du système selon un point de vue commande.
Cette représentation décompose le système en différentes **fonctions de transfert [5]**.

On appelle fonction de transfert H(p) d'un système la relation dans le domaine symbolique telle que $H_{(p)} = \frac{S_{(p)}}{E_{(p)}}$. **Elle caractérise le comportement intrinsèque du système et ne dépend ni de l'entrée, ni de la sortie**.



2.5. Représentation générale d'un système asservi

Après manipulations sur le schéma-bloc d'un système complexe [5], on arrive toujours à un système bouclé dont la forme est la suivante :



• A(p) qui est la fonction de transfert en chaîne directe,
• B(p) qui correspond à la fonction de transfert de la chaîne de retour,

On définit :

La **fonction de transfert BOUCLE OUVERTE** H_{BO} $\quad \boldsymbol{H_{BO(p)} = \frac{R_{(p)}}{\epsilon_{(p)}}} = A_{(\boldsymbol{p})}.B_{(\boldsymbol{p})}$

Cette fonction de transfert est <u>sans dimension</u>, pour cela on ouvre la boucle au sommateur.

La **fonction de transfert BOUCLE FERMEE** H_{BF} $\quad \boldsymbol{H_{BF(p)} = \frac{S_{(p)}}{E_{(p)}} = \frac{A_{(p)}}{1+A_{(p)}.B_{(p)}}}$

$$\boldsymbol{H_{BF(p)} = \frac{A}{1+A.B}}$$ [6]

Démonstration :

$S = A.\varepsilon = A.(E-R) = A.E - A.B.S$

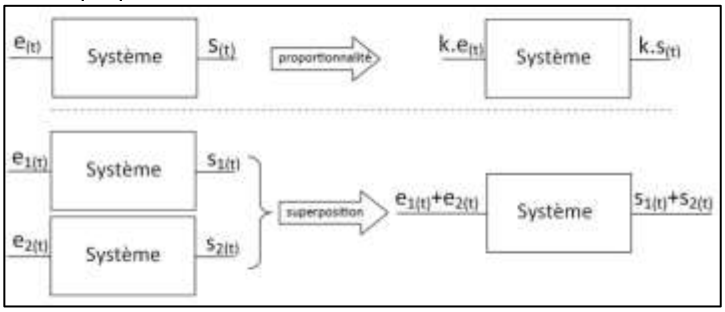
$S(1+AB) = A.E$

$\mathrm{S} = \frac{\mathrm{A}}{1+\mathrm{AB}}.\mathrm{E} \qquad H_{BF(p)} = \frac{S_{(p)}}{E_{(p)}} = \frac{A}{1+A.B}$

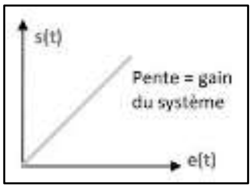
3. SLCI : SYSTEMES LINEAIRES CONTINUS ET INVARIANTS [7]

3.1. Linéaires

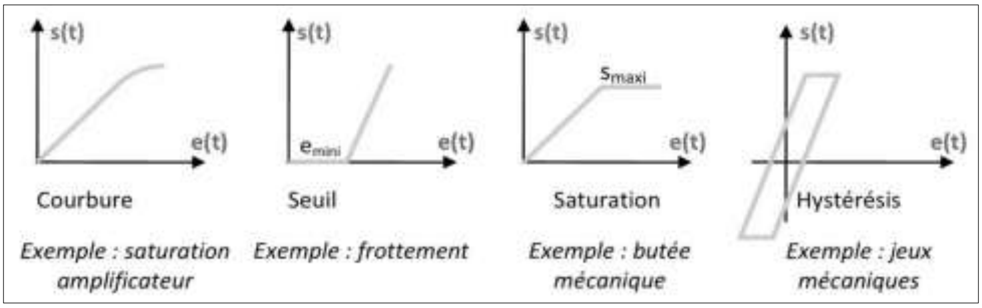
Un système est dit linéaire si la fonction qui décrit son comportement est elle-même linéaire. Cette dernière vérifie alors **le principe de proportionnalité et de superposition**.



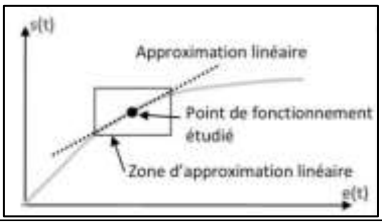
Si le système est linéaire on obtient, en traçant la réponse $s_{(t)}$ en fonction de $e_{(t)}$ (pour un instant donné ou en régime permanent), la caractéristique du système égale à une droite de pente K (gain du système).



En réalité aucun système n'est parfaitement linéaire. La caractéristique entrée-sortie comporte toujours plus ou moins des non linéarités, notamment aux faibles amplitudes (seuils) ou aux fortes amplitudes (saturation, courbure). Le système est dit non linéaire.



Dans la pratique pour étudier les systèmes, on **linéarise** la caractéristique entrée-sortie **au voisinage du point de fonctionnement étudié** en remplaçant la portion de courbe par une droite. Le système est dit alors linéarisé.

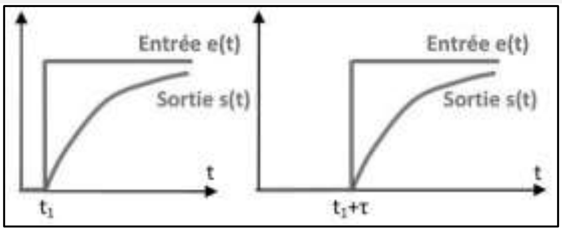


3.2. Continus

Un système est continu, par opposition à un système discret, lorsque les variations des grandeurs physiques sont définies à chaque instant (ils sont caractérisés par des fonctions continues). On parle aussi dans ce cas de système analogique.

3.3. Invariants

Un système est dit invariant si on suppose que les caractéristiques du système ne varient pas au cours du temps ("le système ne vieillit pas").



3.4. Conséquences

Un système linéaire continu invariant peut être représenté par une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

4. MODELISATION DES SLCI

4.1. Classification

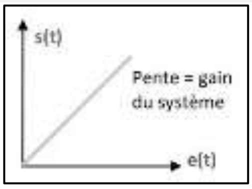
On distingue deux stratégies pour établir un modèle d'un SLCI :

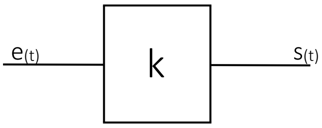
- **Modèle de comportement**
  Approche expérimentale : on procède à un ou plusieurs essais du système et on identifie le système au modèle le plus proche : 1er ou 2nd ordre, avec une intégration ou sans…
- **Modèle de connaissance**
  Etabli à partir des lois physiques qui régissent le système, le modèle de connaissance est un modèle théorique qui demande une connaissance fine des paramètres du système. Par exemple, pour la machine à courant continu : Résistance, Inductance, constante de couplage…

Dans tous les cas, on se rapproche d'une forme canonique pour identifier facilement les paramètres de comportement : gain statique, précision, rapidité, stabilité.

4.2. Gain Pur

Une grande partie des éléments d'un système peut être modélisée par une constante, c'est à dire une relation de proportionnalité directe entre l'entrée et la sortie : $s_{(t)} = k.e_{(t)}$. La constante de proportionnalité est alors directement le gain de la fonction de transfert associée.





On peut modéliser par un gain :

- **les éléments de transmission de puissance,**

  Ex. : réducteur à roue et vis sans vis, à engrenages, système vis-écrou...

- **les préactionneurs,**

  Ex. : variateur, hacheur, servo-valve…

- **les capteurs.**

  Ex. : potentiomètre, génératrice tachymétrique, capteur de température...

4.3. Systèmes d'ordre 1 [8]

Un modèle plus complet tient compte de la bande passante : le modèle dit du premier ordre est très répandu. La forme générale de l'équation différentielle caractéristique d'un système du premier ordre est :

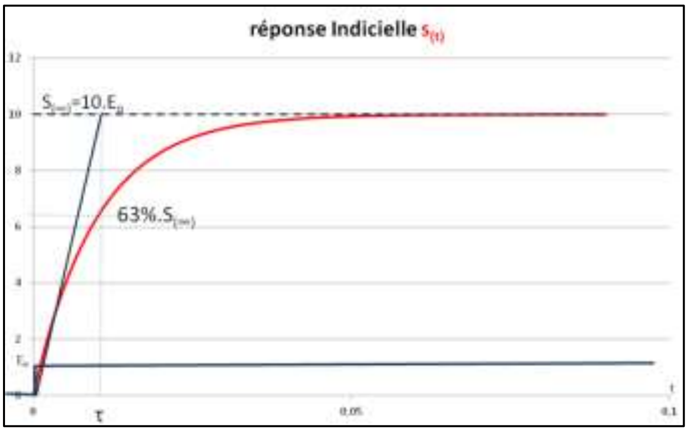
$$\tau \frac{ds}{dt} + s_{(t)} = K.e_{(t)}$$

à connaître :

où :
K est le gain statique du système,
τ est la constante de temps.

La réponse $s_{(t)}$ du système du premier ordre à une entrée Echelon $e_{(t)}=E_o.u_{(t)}$ et sa représentation graphique.

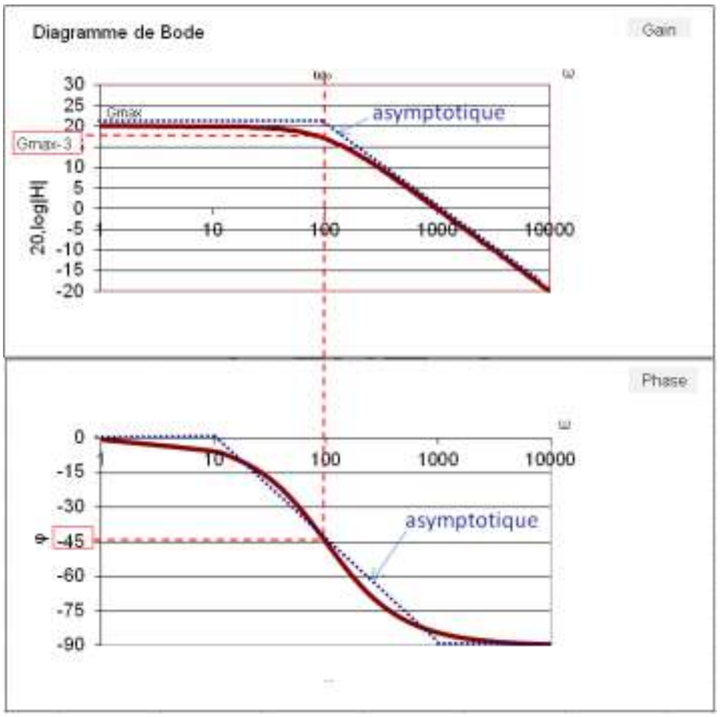
$$s_{(t)} = K.E_o.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$



Tracé pour $E_o = 1V$ K=10 et $\tau = 0{,}01s$

La représentation fréquentielle du système du premier ordre par un tracé du Diagramme de Bode (le plus souvent asymptotique).

Il renseigne sur le comportement du système pour toutes les fréquences et est donc très utile.[9]



On peut modéliser par un premier ordre :

- **Les actionneurs**
  Ex. : machine à courant continu à mode dominant électromécanique

- **les systèmes thermiques,**
  Ex. : four, chauffe-eau…

- **et tous les systèmes complexes dont le mode dominant est un 1er ordre.**

4.4. Systèmes d'ordre 2

Un troisième modèle indispensable est le 2nd ordre.

La forme générale de l'équation différentielle caractéristique d'un système du second ordre est :

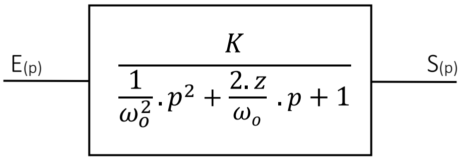
$$\frac{1}{\omega_0^2}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{2.z}{\omega_o}\cdot\frac{ds}{dt}+s_{(t)}=K.e_{(t)}$$

où :
K est le gain statique du système,
z est le coefficient d'amortissement,
ω_o la pulsation propre non-amortie.

Soit dans l'espace de Laplace

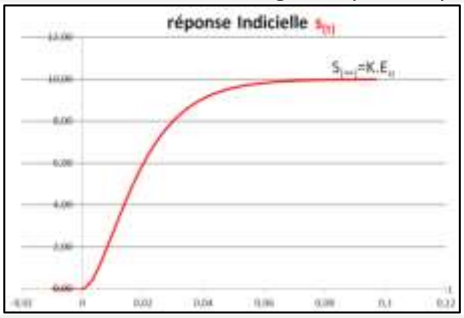
$$\frac{1}{\omega_0^2}.p^2.S_{(p)}+\frac{2.z}{\omega_o}.p.S_{(p)}+S_{(p)}=K.E_{(p)}$$

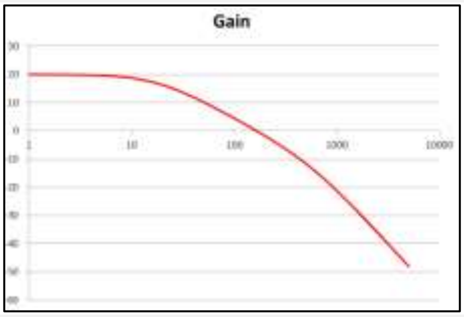
Alors $H_{(p)}=\frac{S_{(p)}}{E_{(p)}}=\frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2}.p^2+\frac{2.z}{\omega_o}.p+1}$



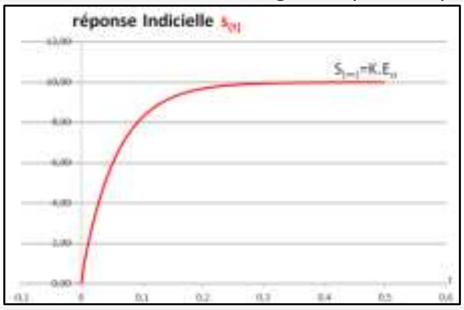
L'expression mathématique de la réponse indicielle $s_{(t)}$ n'est pas à connaître par cœur, par contre il faut savoir identifier la forme de la réponse en fonction de l'amortissement et les trois régimes qui en découlent.

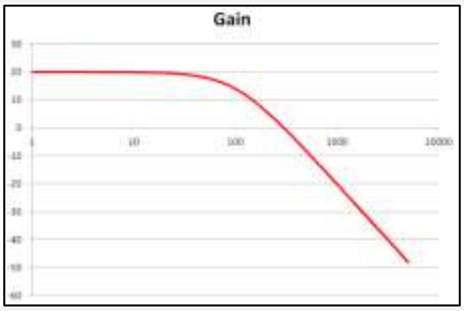
Amortissement z>1 — Régime Apériodique



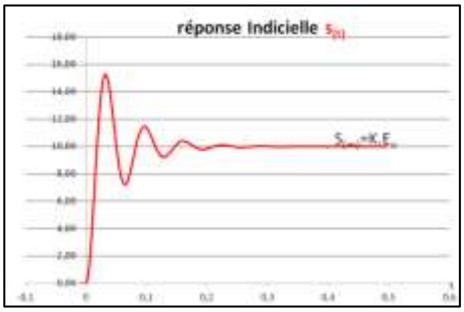


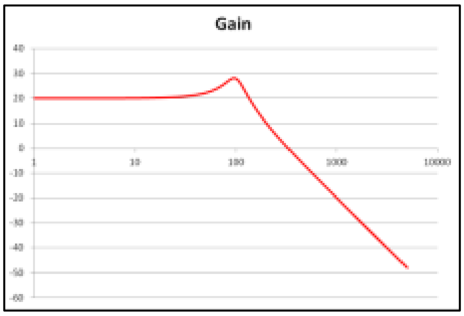
Amortissement z=1 — Régime Apériodique critique





Amortissement z<1 — Régime Pseudo-périodique



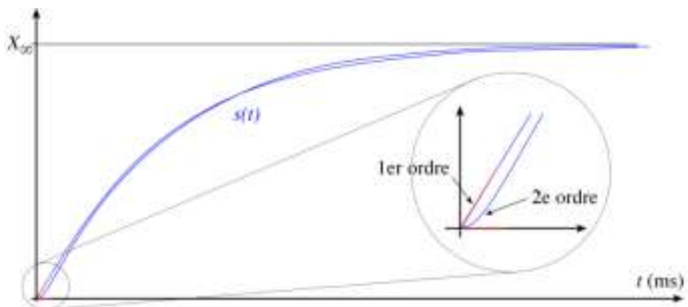


Des abaques permettent alors de caractériser le comportement du système du second ordre et d'en extraire les paramètres du modèle.[10]

4.5. Identification

Comment distinguer un système du second ordre en régime apériodique d'un système du premier ordre ?

La tangente à l'origine de la réponse d'un système du second ordre est horizontale. Ce n'est pas le cas pour la réponse d'un système du premier ordre.



5. CARACTERISATION

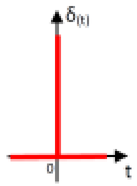
Pour étudier un système d'un point de vue expérimental ou pour valider un modèle numérique, il est nécessaire d'utiliser des consignes simples ou signaux d'entrée TEST.

5.1. Signaux TEST

5.1.1. Impulsion (Dirac)

$$\delta_{(t)}$$

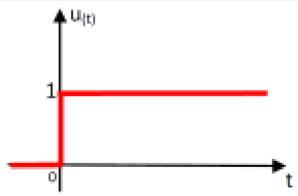
Cette fonction modélise une action s'exerçant pendant un $\delta_{(t)}$ temps très court. La réponse à une impulsion de Dirac s'appelle une réponse impulsionnelle. Difficile à obtenir expérimentalement, elle est très utile sur le plan mathématique car elle contient toutes les fréquences. La fonction de transfert d'un système n'est autre que sa réponse impulsionnelle.



5.1.2. Echelon unitaire

$$u_{(t)}$$

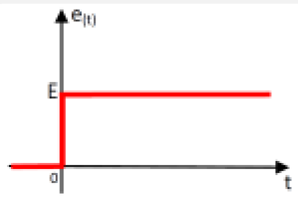
Cette fonction modélise un signal qui passe très rapidement de 0 à 1 et qui reste ensuite à 1. C'est le signal qui permet de décrire les entrées dans les conditions de Heaviside.



5.1.3. Echelon (Step)

$$e_{(t)} = E.u_{(t)}$$

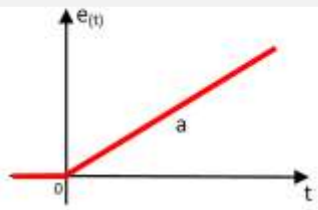
La réponse à un échelon s'appelle une réponse indicielle. Elle est très utile pour caractériser un système asservi.



5.1.4. Rampe

$$e_{(t)} = a.t.u_{(t)}$$

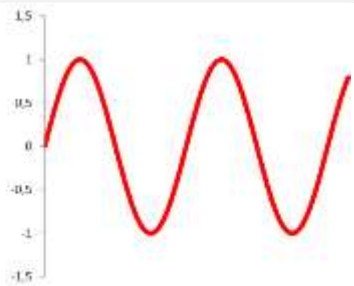
Utile pour simuler des entrées à variation lente, comme des perturbations (température extérieure par ex.).



5.1.5. Harmonique

$$e_{(t)} = \sin(\omega.t).u_{(t)}$$

C'est une entrée qui permet de connaitre le comportement d'un système sur une échelle fréquentielle, ce qui est très instructif, mais il n'est pas toujours possible de la mettre en œuvre expérimentalement car la chaîne d'énergie du système doit être complètement réversible.



5.2. Performances des SLCI

Une boucle d'asservissement permet d'apporter les avantages suivants :

- Rendre contrôlable un système qui ne l'est pas en boucle ouverte,
- Augmenter la précision de fonctionnement d'un système,
- Diminuer l'influence des perturbations extérieures,
- Diminuer l'effet des non linéarités,
- Améliorer la rapidité de fonctionnement.

Quatre critères principaux :

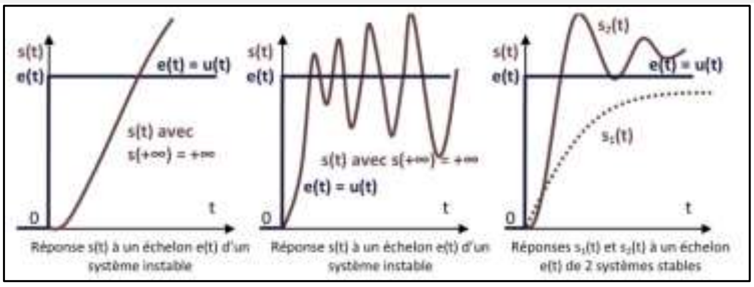
- la stabilité
- la précision
- la rapidité
- l'amortissement

L'asservissement « idéal » est un système ayant une bonne stabilité, une bonne précision ainsi qu'un régime transitoire rapide et bien amorti.

Cependant ces critères de performances ne sont pas toujours compatibles. Par exemple, un processus rapide est généralement léger, il a ainsi une faible inertie et risque d'être peu amorti voire instable. D'autre part si on veut améliorer la précision, on raidit l'asservissement et on risque de tomber alors sur un phénomène d'instabilité. Tout l'art de l'automaticien est de réaliser une partie commande permettant de respecter au mieux ces critères.

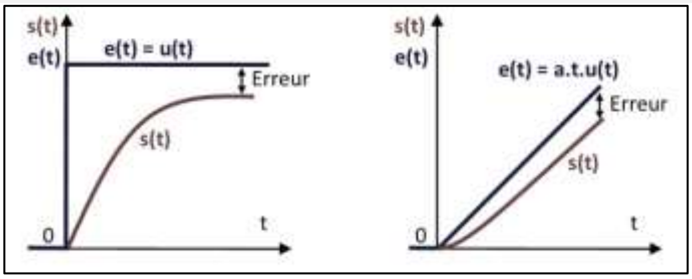
5.2.1. Stabilité

Un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée. Le bouclage peut déstabiliser un système. C'est le critère que l'on regarde en premier, car sinon on ne peut pas analyser les autres critères. On souhaite toujours que le système asservi soit stable.



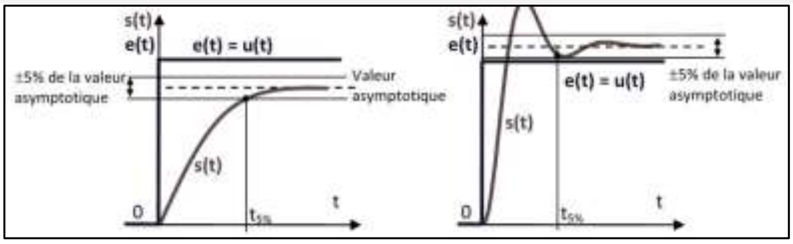
5.2.2. Précision

La précision qualifie l'aptitude du système à atteindre la valeur visée. Elle est caractérisée par l'erreur $\varepsilon_{(t)}$entre la consigne et la sortie quand celle-ci est stabilisée (valeur asymptotique effectivement atteinte par la grandeur de sortie). **Si l'erreur est nulle, on dit que le système est précis**



5.2.3. Rapidité

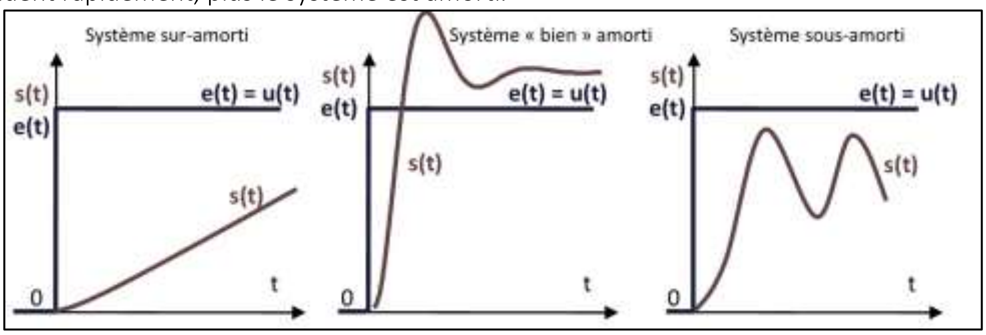
La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée



Cependant, la valeur finale étant le plus souvent atteinte de manière asymptotique, on retient alors comme principal critère d'évaluation de la rapidité d'un système, **le temps de réponse à 5%.**

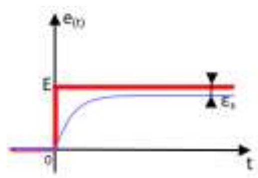
5.2.4. Amortissement (systèmes d'ordre >2)

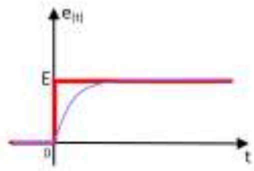
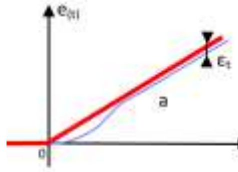
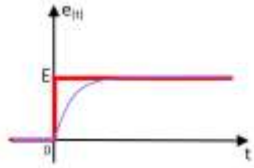
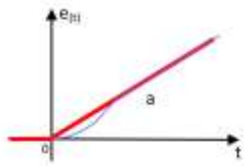
L'amortissement est caractérisé par le rapport entre les amplitudes successives des oscillations de la sortie. Plus ces oscillations s'atténuent rapidement, plus le système est amorti.



5.3. Classe d'un système

La classe d'un système est fixée par **le nombre d'intégrations** dans la fonction de transfert **Boucle Ouverte**. Elle permet de connaitre rapidement la précision d'un système.

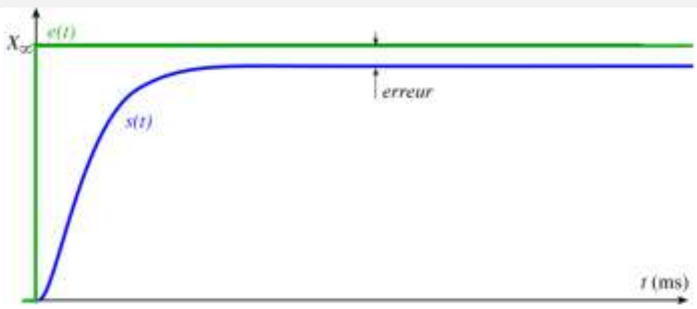
Classe 0	erreur statique non nulle (sur entrée échelon) $\varepsilon_s \neq 0$	

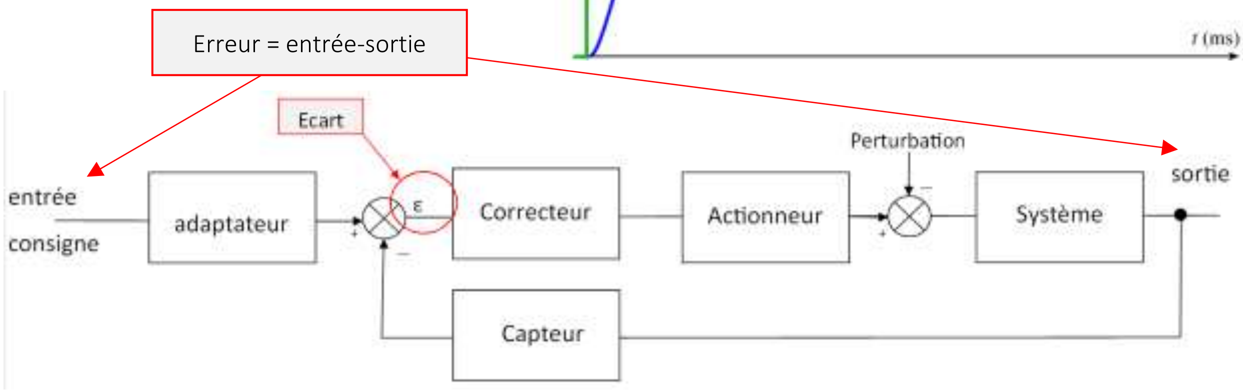
Classe 1	erreur statique nulle $\varepsilon_s = 0$	
	erreur de traînage non nulle (sur entrée rampe) $\varepsilon_t \neq 0$	
Classe 2	erreur statique nulle $\varepsilon_s = 0$	
	erreur de traînage nulle (sur entrée rampe) $\varepsilon_t = 0$	

6. PRECISION

6.1. Définition

Un SLCI est dit précis si la sortie suit l'entrée en toutes circonstances. Elle est donnée par la valeur de l'erreur (différence entre l'entrée et la sortie), pour des entrées test (échelon, rampe), une fois le régime transitoire éteint.





6.2. Calcul

Dans le cas où un SLCI est défini par un modèle de connaissance dans l'espace de Laplace, on n'utilise pas la transformée inverse de Laplace pour retrouver le comportement temporel de l'erreur mais on calcule la précision en utilisant le Théorème de la valeur finale

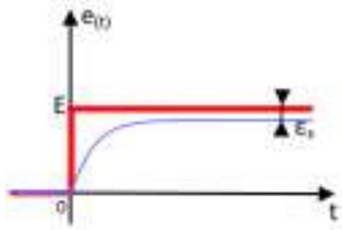
$$Erreur = \lim_{t \to \infty} Er_{(t)} = \lim_{p \to 0} p.Er_{(p)}$$

Dans le cas d'un retour unitaire, on calcule l'erreur en sortie du comparateur, et l'erreur est égale à l'écart.

6.3. Erreur statique ε_s

La précision peut être caractérisée par l'erreur statique ε_S, valeur de l'écart en régime permanent entre la sortie et l'entrée sur une entrée de type Echelon (également appelée Entrée Indicielle).

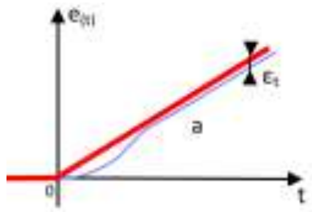
$$e_{(t)} = E \xrightarrow{Laplace} \boldsymbol{E}_{(\boldsymbol{p})} = \frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{p}}$$



6.4. Erreur de trainage ε_t

La précision peut être caractérisée par l'erreur de traînage ε_t, valeur de l'écart en régime permanent entre la sortie et l'entrée sur une entrée de type rampe .

$$e_{(t)} = a.t \xrightarrow{Laplace} \boldsymbol{E}_{(\boldsymbol{p})} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{p}^2}$$



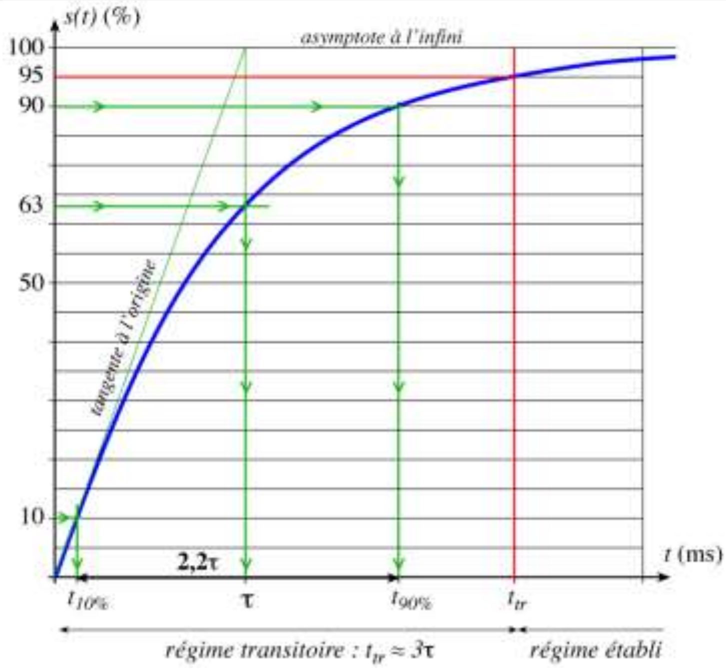
7. RAPIDITE

7.1. Rapidité d'un système d'ordre 1

Le temps de réponse t_{tr} d'un SLCI est défini à 95% de l'excursion de la sortie.

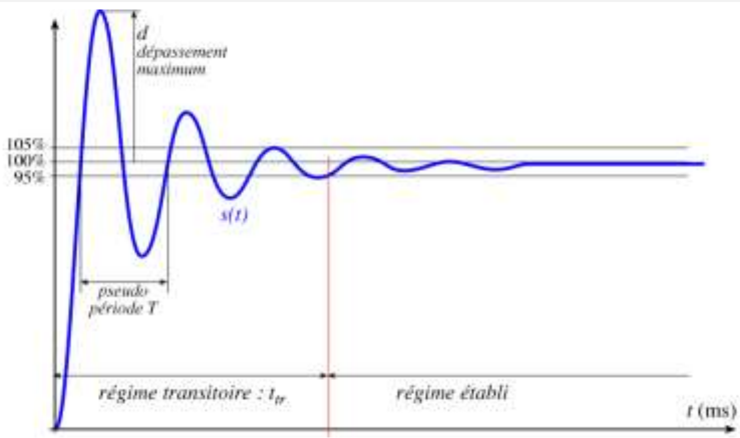
Pour un système d'ordre 1,

$$t_{tr} = 3.\tau$$

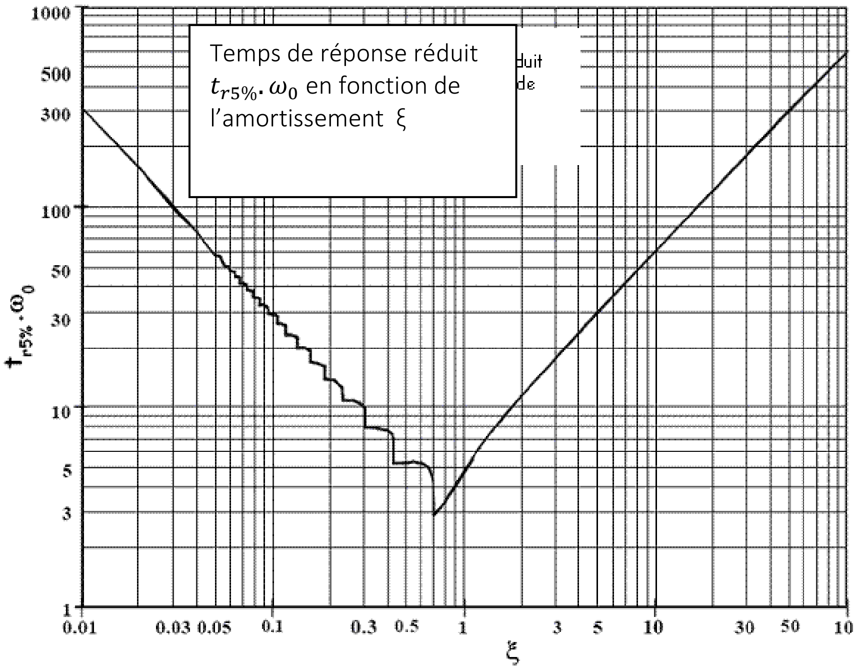


7.2. Rapidité d'un système d'ordre 2

Le temps de réponse t_{tr} d'un SLCI est défini lorsque le signal de sortie entre dans la fourchette $\pm$5% de la valeur finale de l'excursion de la sortie.



Classiquement, l'abaque du temps de réponse réduit en fonction de l'amortissement est proposé.

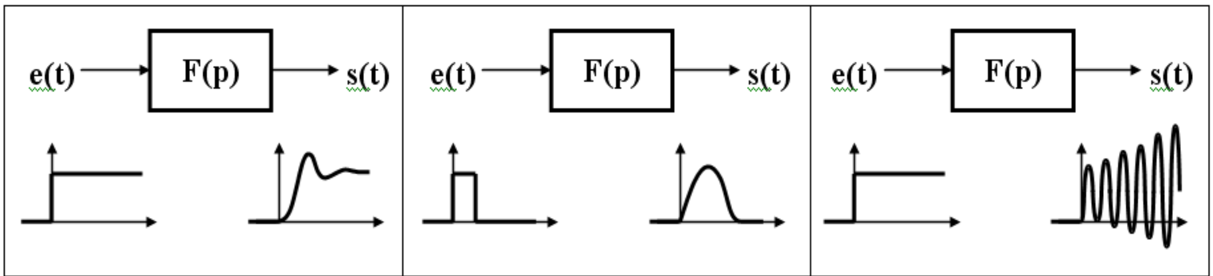


8. STABILITE

Le comportement du système en boucle fermée dépend essentiellement du dénominateur de $H_{BF(p)}$,
on étudiera $1 + H_{BO(p)} = 0$ dans l'espace de calcul des complexes par une transformation $p = j.\omega$, soit $\underline{H}_{BO(j\omega)} = -1$

$$H_{BF(p)} = \frac{S_{(p)}}{E_{(p)}} = \frac{A}{1 + A.B} = \frac{A}{1 + H_{BO(p)}}$$

8.1. notion de stabilité



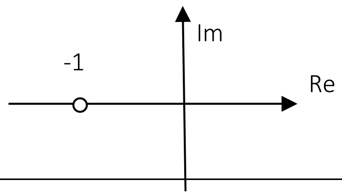
Système **stable**	Système **stable**	Système **instable**

8.2. Condition théorique d'instabilité

La relation $\underline{H}_{BO(j\omega)} = \underline{A}.\underline{B} = -1$ définit la condition théorique d'instabilité d'un système bouclé.
En complexe $\boldsymbol{\underline{H}_{BO(j\omega)} = -1}$ se traduit par :

Module $\quad |\underline{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{BO}}| = \mathbf{1}$

Argument $\quad \boldsymbol{Arg_{(\underline{H}_{BO})} = -\pi}$



D'un point de vue pratique pour le système, lorsque cette situation se rencontre, il y a « accrochage ».
Dès qu'un signal (bruit électrique, thermique, acoustique, vibration mécanique…) existe dans la boucle en l'absence de commande, la sortie S existe et son amplitude se met à croître théoriquement vers l'infini.
Le système à un comportement divergent ou oscillatoire, il est instable.
En réalité l'amplitude de la sortie est limitée par les non linéarités de type saturation, ou par la destruction d'un constituant…

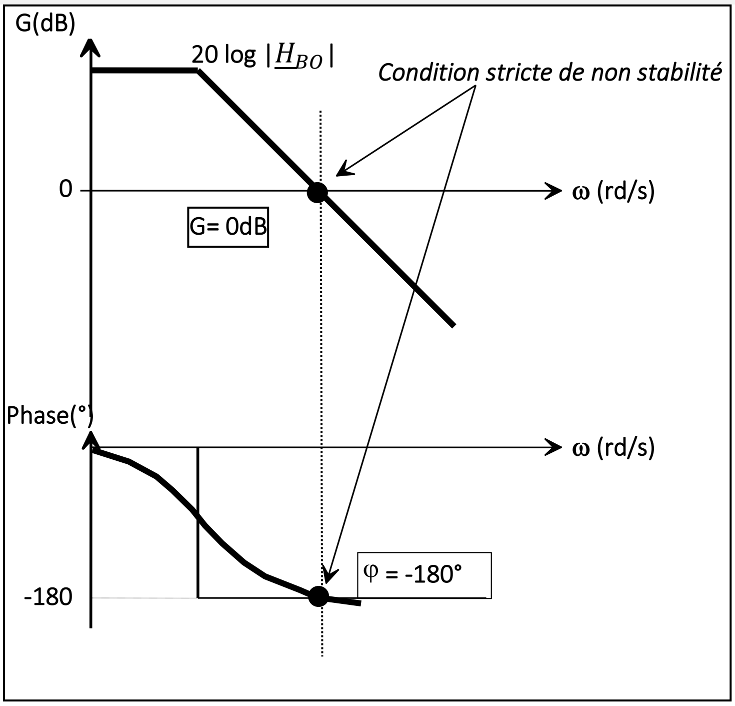
8.3. Condition stricte d'instabilité dans le tracé de BODE :

Dans le plan de BODE,

la condition $\underline{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{BO(j\omega)}} = -\mathbf{1}$,

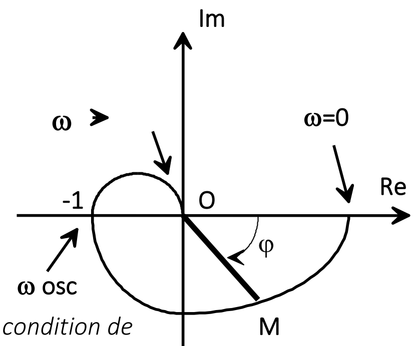
se traduit par

- Un gain $G = 20.\log|\underline{H}_{BO}| = 0dB$
- Un **argument** $\varphi = \pm\pi$



Compléments : Critère du revers ou de Nyquist
Le plan de Nyquist est une représentation de $\underline{H}_{BO(j\omega)}$ <u>dans le plan complexe.</u>

Pour toute valeur de ω de 0 à l'infini, on représente la partie réelle et la partie imaginaire de $\underline{H}_{BO(j\omega)}$.
Le segment **OM** indique pour une pulsation **ω₁**, le module et l'argument de $\underline{H}_{BO(j\omega)}$
La condition stricte d'instabilité, est donnée pour le passage au point critique -1.
Un système en boucle fermée sera stable, si le tracé de Nyquist de son gain de boucle ($|\underline{H}_{BO(j\omega)}|$) passe à droite du point critique - 1 pour les valeurs de ω croissantes. Il est instable sinon.



8.4. Degré de stabilité, marge de phase et de gain

Nous avons vu la condition stricte de non stabilité, mais il est toujours risqué de s'approcher de celle-ci, il est impératif de garder une marge de sécurité qui se traduit par :

- Un déphasage ϕ inférieur à 180° pour un module unité ou gain de 0dB.
- Un gain inférieur à 0 dB pour un déphasage de -180°.

Si ω_{Go} est la pulsation pour laquelle G = 0dB et ω_{pi} la pulsation pour laquelle ϕ= -180°, on définit alors :

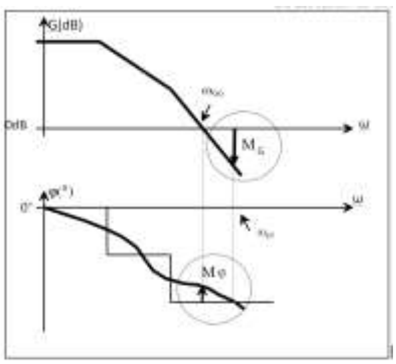
Marge de phase : Mϕ = 180° + arg [$\underline{H}_{BO(j\omega_{Go})}$]

Marge de gain : MG = 20 log |$\underline{H}_{BO(j\omega_{pi})}$|

Valeurs usuelles retenues :

- Mϕ de l'ordre de 45°
- MG de l'ordre de - 6dB

Représentation des marges de phase et gain dans le tracé de BODE



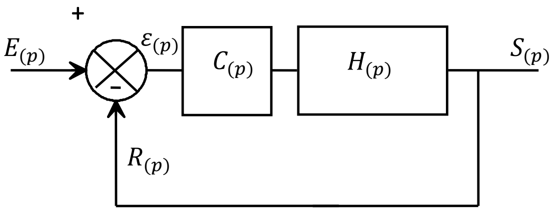
9. CORRECTION DES SYSTEMES AUTOMATIQUES

9.1. Correcteur P proportionnel

On suppose maintenant que le système est à retour unitaire, et que la fonction de transfert $H_{(p)}$ du système est de type passe bas. On ajoute un correcteur $C_{(p)}$ en série avec $H_{(p)}$.

si le correcteur $C_{(p)}$ correspond à un gain K_p pur, la fonction de transfert de l'erreur devient.

$$\varepsilon_{(p)} = \frac{E_{(p)}}{1 + K_p . H_{(p)}}$$



Si le gain K_p est très grand, l'erreur sera réduite, mais on observera une diminution de la marge de phase qui peut conduire à l'instabilité. On retiendra, que l'augmentation du gain proportionnel K_p :

- Réduit l'erreur statique, ce qui est bénéfique puisque la précision augmente,
- Réduit la marge en gain et phase ce qui est néfaste puisque la stabilité diminue.

☝ Il y a dilemme entre stabilité et précision pour une correction proportionnelle $(\boldsymbol{K_p})$

9.2. Correcteur PI proportionnel intégral

Cas d'un système bouclé unitaire avec une fonction de transfert du système du premier ordre $H_{(p)} = \frac{H_0}{1+\tau.p}$.

Le correcteur **PI** est noté $C_{(p)}$, de fonction de transfert $C_{(p)} = K.\left(1 + \frac{1}{T_i.p}\right)$

L'erreur statique est nulle dans ce cas

$$\varepsilon_s = \lim_{p\to 0} p.\frac{E_{(p)}}{1 + C_{(p)}.H_{(p)}} = \lim_{p\to 0} \frac{E}{1 + C_{(p)}.H_{(p)}} = \lim_{p\to 0} \frac{E}{1 + K.\left(1 + \frac{1}{T_i.p}\right)\left(\frac{H_0}{1+\tau.p}\right)} = 0$$

La présence d'une intégration $\left(\frac{1}{T_i.p}\right)$ dans la boucle annule l'erreur statique, le système est dit de classe 1.

Un correcteur PI apportant une intégration dans la boucle, l'erreur statique (entrée de type échelon) devient nulle.

Du point de vue fréquentiel, un correcteur de type PI (division par $j\omega$ pour l'intégration) a un gain statique infini pour $\omega = 0$, Il annule ainsi l'erreur permanente sur un échelon.

Mais l'existence d'un déphasage arrière de $\pi/2$ aux basses fréquences, augmente le risque d'instabilité si son réglage est mal choisi.

9.3. Correcteur PID Proportionnel, Intégral, Dérivé

Le correcteur PID a pour expression :

- Structure de type somme $C_{(p)} = K_p.\left(1 + \frac{1}{T_i.p} + T_d.p\right)$

  Cette écriture est préférable pour un correcteur numérique réalisé par un algorithme programmé.

- Structure de type produit $C_{(p)} = K_p.\left(1 + \frac{1}{T_i.p}\right)(1 + T_d.p)$

Résumé de l'action des trois types de correction (PID) :

- **Action proportionnelle P :** Elle diminue l'erreur statique sans l'annuler, augmente la rapidité donc la bande passante, ce qui réduit la stabilité.

- **Action intégrale I :** Elle annule l'erreur statique, diminue la stabilité (réduction de la marge de phase) et ralentit le système.

- **Action dérivée D :** Elle n'a pas d'effet sur l'erreur statique, mais augmente la rapidité du système et augmente sa stabilité.

Crédits : Florestan Mathurin, JC Rolin, Claude Divoux