Transformées de Laplace

Illustration par la machine à courant continu

Contenu

1. DEFINITION

La résolution d'équations différentielles est souvent compliquée dès que l'ordre est supérieur à 1.
L'utilisation de la transformée de Laplace permet de ramener la résolution d'une équation différentielle a une manipulation algébrique et permet dans de nombreux cas de retrouver rapidement le résultat recherché : en effet la solution de l'équation différentielle se limite alors, à partir des racines du polynôme, à la recherche dans une table de la forme type de la solution.

La transformée de Laplace possède des propriétés qui vont donc nous permettre de résoudre des équations différentielles, de traiter ensuite plus facilement les circuits en régime sinusoïdal et de comprendre par la suite les notions sur les systèmes bouclés à l'aide d'une modélisation par schémas blocs.

1.1. Transformées de Laplace

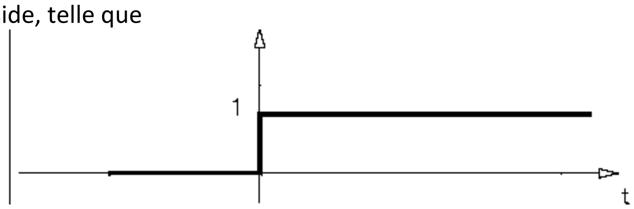
Soit f une fonction de la variable réelle t définie sur R et supposée nulle pour t<O, on appelle transformée de Laplace de f, la fonction F définie ci-contre avec p une variable réelle ou complexe.

$$\boxed{f(t) \longrightarrow F(p) = \int_0^\infty e^{-p.t}.f(t).dt}$$

On définit la fonction existence *u(t)* ou fonction de Heaviside, telle que

$\forall t \langle 0, \qquad u(t) = 0$

$\forall t \geq 0 \qquad u(t) = 1$



Ainsi, on ne calcule pas la transformée de Laplace de f(t) mais *de f(t).u(t)* qui n'est définie que pour t ≥ 0.
On note : $F(p) = L[f(t)]$, la transformée de Laplace de *f(t). F(p)* est l'image de *f*(t).

Exemple : f(t) = Γ(t) (échelon) a pour transformée de Laplace $F(p) = \Gamma(p) = \dfrac{1}{p}$

1.2. Transformation de Laplace inverse

La transformation de Laplace inverse consiste à rechercher la fonction temporelle qui correspond à une fonction *F*(p) donnée. Lorsque la fonction *Fp*() est sous la forme de fractions rationnelles en p , la méthode à utiliser est la décomposition en éléments simples.
La fonction temporelle consiste alors en la recherche dans les tables de la transformée inverse de chaque fraction élémentaire. La fonction temporelle correspondante est la somme des fonctions temporelles élémentaires.

1.3. Propriétés de la transformée de Laplace :

unicité	à $f(t)$ il correspond $F(p)$ unique à $F(p)$ il correspond $f(t)$ unique
addition	$\mathrm{L}[f(t) + g(t)] = F(p) + G(p)$
linéarité	$\mathrm{L}[a \cdot f(t) + b \cdot g(t)] = a \cdot F(p) + b \cdot G(p)$
produit de convolution	$\mathrm{L}[f(t) * g(t)] = F(p) \cdot G(p)$ avec $f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-u).g(u)du$ produit de convolution
Dérivation	dérivée première $\mathrm{L}\left[\dfrac{df(t)}{dt}\right] = p \cdot F(p) - f(0^+)$ dérivée seconde $\mathrm{L}\left[\dfrac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = p^2 \cdot F(p) - pf(0^+) - \dot{f}(0^+)$ dans la plupart des cas nous aurons $f(0^+) = 0$
Intégration	$\mathrm{L}\left[\int_0^t f x) dx\right] = \dfrac{F(p)}{p} + \dfrac{A_{0^+}}{p}$

Remarque importante: si les conditions initiales sont nulles (conditions d'Heaviside) alors:

- **Dériver** dans le domaine temporel revient à **multiplier par p** dans le domaine symbolique de Laplace
- **Intégrer** dans le domaine temporel revient à **diviser par p** dans le domaine symbolique.

Le tableau des transformées de Laplace usuelles est donné page 4.

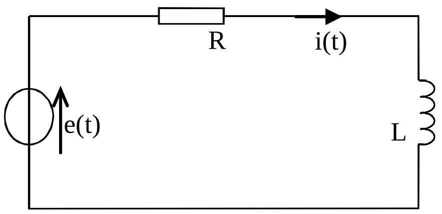
1.4. Théorèmes de la valeur finale et de la valeur initiale

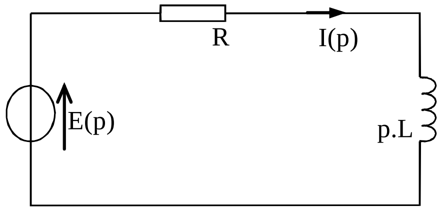
$$\boxed{\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{p \to 0} p.F(p)} \qquad \boxed{\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{p \to \infty} p.F(p)}$$

1.5. Intérêt de la transformée de Laplace

Donner une forme algébrique aux équations différentielles linéaires à coefficients constants

illustration :





$$e(t) = R.i(t) + L.\frac{di}{dt}$$

i(t) = ?

$$E(p) = (R + p.L).I(p)$$

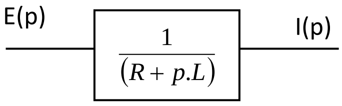
$$I(p) = \frac{1}{(R + p.L)}.E(p)$$

1.6. Causalité

La transformée de Laplace est réduite aux fonctions causales, c.a.d. f(t) = 0 pour t<0 (pour permettre l'écriture des fonctions de transfert)

- si les conditions initiales sont non nulles, $I(0) = I_o$, en reprenant le calcul de l'expression de $I(p)$ on peut montrer que la fonction de transfert $\frac{I(p)}{E(p)}$ n'est pas définissable.

- Si I_o=0,



La possibilité de décrire les systèmes par des fonctions de transfert Entrée-Sortie impose la causalité des fonctions étudiées (nulles pour t négatif). En réalité, il existe toujours des non-linéarités et un comportement stable autour d'un point de repos.
On applique alors Laplace aux variations des grandeurs à partir du point de repos.

Exemple :	$E(t) = E_o + e(t)$	E_o point de repos	e(t) la variation de tension
	$I(t) = I_o + i(t)$	I_o point de repos	i(t) la variation de courant

Au point de repos $\quad I_o = \frac{E_o}{R}$

Equation différentielle

$$E(t) = R.I(t) + L.\frac{dI}{dt}$$

$$E_o + e(t) = R.(I_o + i(t)) + L.\frac{d(I_o + i(t))}{dt}$$

$$e(t) = (R.I_o - E_o) + R.i(t) + L.\frac{di}{dt} = R.i(t) + L.\frac{di}{dt}$$

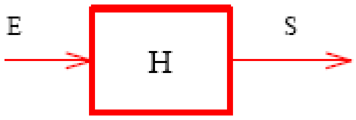
et à $e(t) = R.i(t) + L.\frac{di}{dt}$ correspond la transformée de Laplace $\quad E(p) = R.I(p) + p.L.I(p)$

soit $\quad \boxed{I(p) = \frac{E(p)}{R + p.L}}$

$E(p)$ et $I(p)$ sont les transformées de Laplace des variations des grandeurs considérées et non pas les transformées de Laplace des grandeurs elles-mêmes.

2. NOTION DE FONCTION DE TRANSFERT - SCHEMAS BLOCS

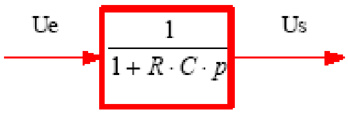
La représentation par le schéma fonctionnel permet de représenter de manière graphique un système linéaire.



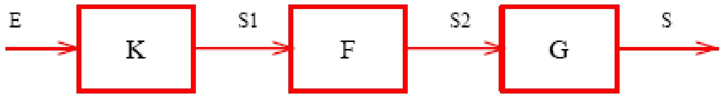
Chaque bloc du schéma caractérise une des fonctions du système, l'allure globale du schéma renseigne aussi sur sa structure (boucle ouverte, boucle fermée).

Les équations différentielles du comportement sont traduites par la fonction de transfert (ou transmittance) de chaque constituant.

Par exemple, un circuit RC peut se représenter sous la forme suivante :



Le système d'équations est remplacé par un ensemble de blocs représentant les fonctions du système. les branches entre les blocs portent les variables intermédiaires globales du système.



S1=K.E S2=F.S1 S=G.S2

S=K.F.G.E
S=H.E
avec H=K.F.G

Il est possible de remplacer des blocs en ligne par le bloc produit des fonctions de chaque bloc.
La représentation par le schéma fonctionnel et la fonction de transfert permettent de déterminer les caractéristiques principales du système **sans résoudre l'équation différentielle**.

Ces représentations sont la base de l'automatique. La représentation par schéma bloc est déduite de la représentation par la transformée de Laplace. La **fonction de transfert globale** peut être déterminée à partir du schéma ou de la représentation par Laplace.

<u>Forme normalisée et passage de l'équation différentielle à la modélisation de Laplace :</u>

Premier ordre : $\tau \frac{ds}{dt} + s(t) = K.e(t)$

Second ordre : $\frac{1}{w_o{}^2}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{2m}{w_o}\frac{ds}{dt} + s(t) = K.e(t)$

Les formes normalisées sont donc comparables, les paramètres ($K - \tau - \omega_0 - m$) étant les mêmes dans les deux représentations.

Remarque : on retrouve les mêmes formes que pour les transmittances complexes si on pose ; p=jω.

3. MISE EN OEUVRE

3.1. Mode dominant d'un système

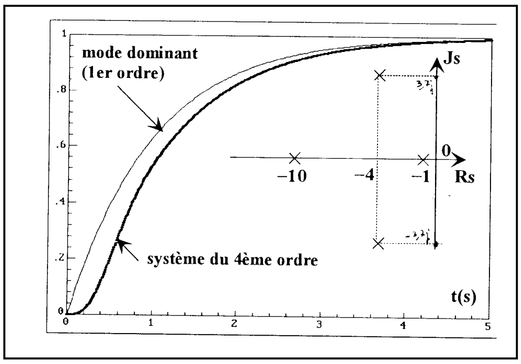
Une fonction de transfert d'ordre supérieur à deux peut être ramenée à un produit de fonctions élémentaires

constante	K
fonction intégration	$\dfrac{1}{\tau.p}$
fonction du premier ordre	$\dfrac{1}{1+\tau_o.p}$

fonction du second ordre	$\dfrac{1}{1+2.\zeta.\tau_o.p+\tau_o^2.p^2}$
retard	$e^{-p.t_o}$

En général, les pôles les plus proches de l'axe imaginaire déterminent la bande passante, donc fixent le comportement général de l'ensemble.

Exemple : ordre 4 $$\mathrm{H(p)} = \frac{\mathrm{K}}{(1+\mathrm{p})(1+\frac{\mathrm{p}}{10})(1+0{,}27.\mathrm{p}+\frac{\mathrm{p}^2}{30})}$$



Le mode dominant de cet ordre 4 apériodique est un premier ordre
On peut lui associer un retard pur pour coller au plus près.

•

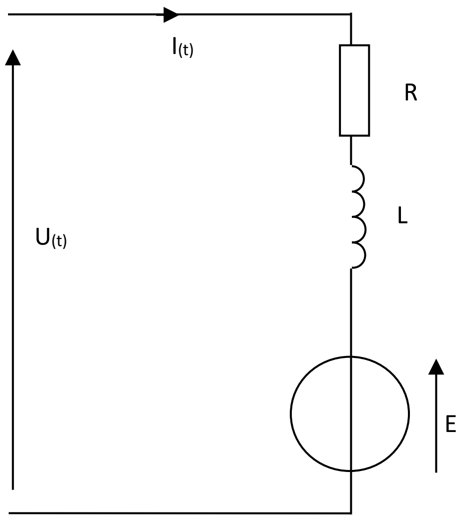
3.2. Tableau des transformées de Laplace

$f(t)$	F(p)
$\delta(t)$	1
$\delta^{(n)}(t)$	$p^n \quad n>0$
A	$\dfrac{A}{p}$
$A.t$	$\dfrac{A}{p^2}$
$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ n entier $n \geq 1$	$\dfrac{A}{p^n}$
$\dfrac{1}{T}e^{-t/T}$ $1-e^{-t/T}$ $t-T+Te^{-t/T}$	$\dfrac{1}{1+Tp}$ $\dfrac{1}{p(1+Tp)}$ $\dfrac{1}{p^2(1+Tp)}$
$\dfrac{1}{T_1-T_2}\left(e^{-t/T_1}-e^{-t/T_2}\right)$ $1-\dfrac{1}{T_1-T_2}\left(T_1e^{-t/T_1}-T_2e^{-t/T_2}\right)$ $t-\left(T_1+T_2\right)-\dfrac{1}{T_1-T_2}\left(T_2^2e^{-t/T_2}-T_1^2e^{-t/T_1}\right)$	$\dfrac{1}{(1+T_1p)(1+T_2p)}$ $\dfrac{1}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}$ $\dfrac{1}{p^2(1+T_1p)(1+T_2p)}$

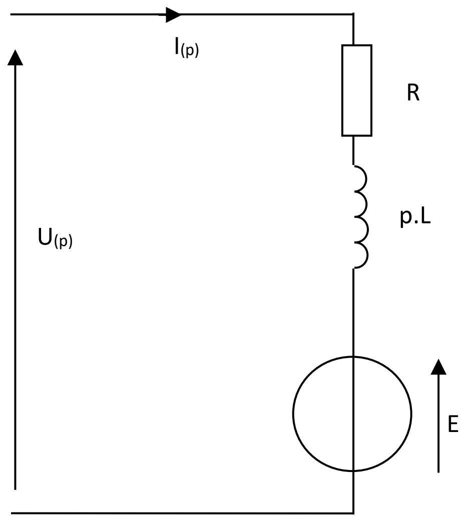
4. MODELE DE LA MACHINE A COURANT CONTINU A FLUX CONSTANT

4.1. Equation électrique

Temporel



Laplace



$$\boxed{U(p)-E(p)=(R+p.L).I(p)}$$

4.2. Equation mécanique

PFD Principe Fondamental de la Dynamique

$$J\cdot\frac{d\Omega}{dt}=C_{m(t)}-C_{r(t)}$$

- C_{em} Couple utile (Nm)
- C_r Couple résistant (Nm)
- J inertie de l'ensemble mécanique (moteur + charge) ($kg.m^2$)
- Ω vitesse de rotation (rad/s)

$$\boxed{J\cdot p\cdot\Omega(p)=C_{m(p)}-C_{r(p)}}$$

4.3. Equation mécanique complète

$$J\cdot\frac{d\Omega}{dt}=C_{m(t)}-C_{r(t)}=C_{em(t)}-C_{p(t)}-C_{r(t)}$$

Avec un couple de pertes supposé de type frottements visqueux $\boxed{C_{p(t)}=fv\cdot\Omega(t)}$

$$J\cdot p\cdot\Omega(p)=C_{em(p)}-C_{p(p)}-C_{r(p)}$$

$$J\cdot p\cdot\Omega(p)=C_{em(p)}-C_{r(p)}-f_v\cdot\Omega(p)$$

$$\boxed{\Omega(p)=\frac{C_{em(p)}-C_{r(p)}}{J\cdot p+f}}$$

4.4. Equations de couplage électromécanique

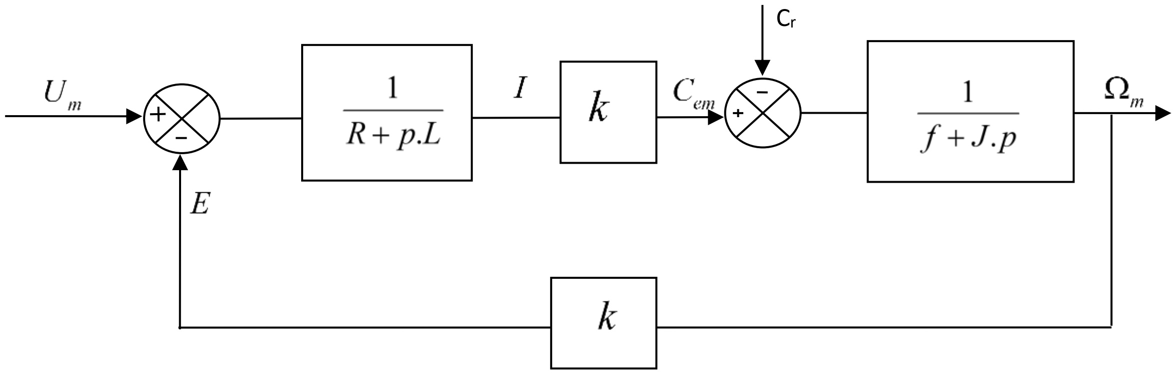
- *Constante de f.e.m* $\boxed{E=k.\Omega}$
- Constante de couple

au niveau de l'entrefer $E.I=C_{em}.\Omega$ alors $\boxed{C_{em}=k.I}$

4.5. Modèle complet

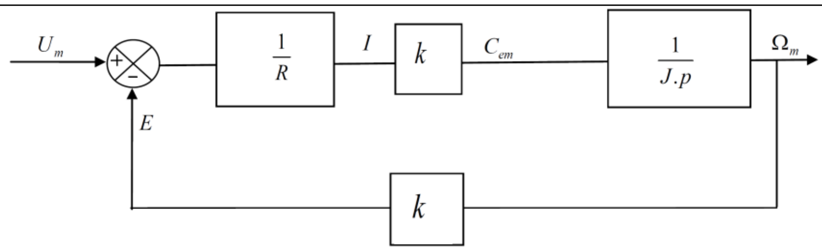
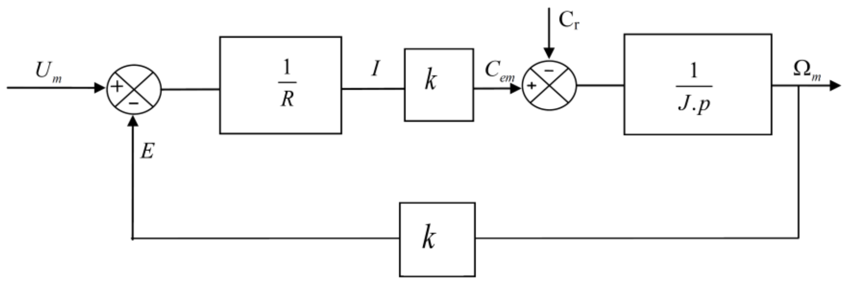
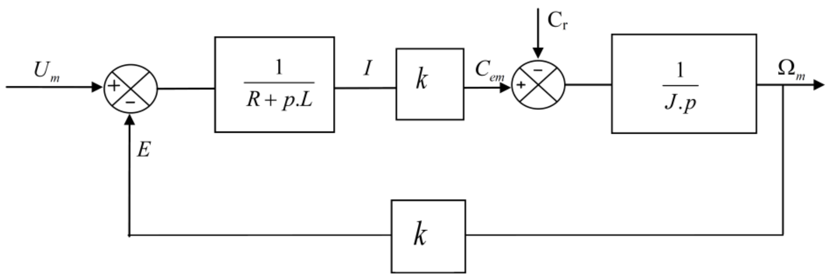
En général, on intègre C_f à C_r , couple résistant de la charge noté dans cette classification C_o

J est l'inertie et f le coefficient de frottements visqueux de l'ensemble électromécanique Moteur+Charge

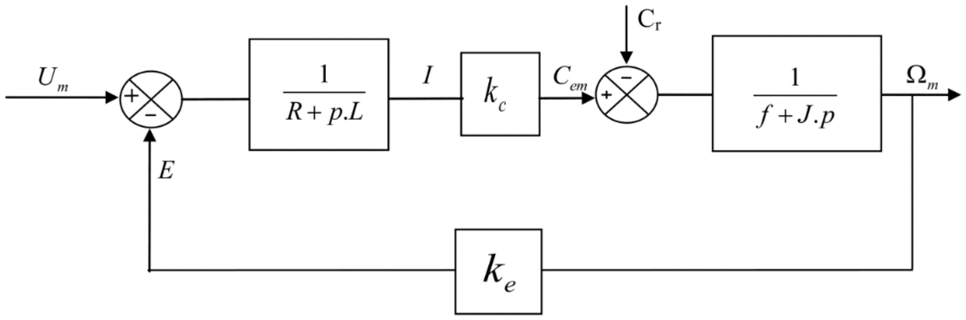


C'est le modèle complet le plus souvent utilisé car il est établi à partir d'un modèle de connaissance qui fait appel à des lois de la physique (équations électriques, mécaniques, couplage...).

4.6. Modèles simplifiés

hypothèses	Modèle
Pas de couple de pertes (frottements secs ou visqueux), **Effets de l'inductance négligés,** **Pas de couple résistant (machine à vide).**	
Pas de couple de pertes (frottements visqueux), **Effets de l'inductance négligés.**	
Pas de couple de pertes (frottements visqueux),	

4.7. Mise en équations à partir du modèle complet



2 entrées : une consigne $U_{(p)}$

une perturbation $C_{r(p)}$

4.8. Etude vis à vis de la consigne Cr(p)=0

Exprimons $\frac{\Omega(p)}{U(p)} =$

en exprimant $\Omega(p)$ à partir du modèle complet on obtient : $$\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{\left(\frac{k}{k^2+R.f}\right)}{1+\left(\frac{R.J+L.f}{k^2+R.f}\right).p+\left(\frac{L.J}{k^2+R.f}\right).p^2}$$

On pose $\boxed{\tau_e = \frac{L}{R}}$ $\boxed{\tau_{em} = \frac{R.J}{k^2+R.f}}$ $\boxed{H_o = \frac{k}{k^2+R.f}}$

alors $$\boxed{\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{H_o}{1+(\tau_{em}+\lambda.\tau_e).p+(\tau_e.\tau_{em}).p^2}}$$

Dans le cas général le rotor est constitué de matériaux ferromagnétiques

Alors $\tau_{em} >> \lambda.\tau_e$ ou encore $\tau_{em} >> \tau_e$

on obtient

$$\frac{\Omega(p)}{C_r(p)} = -R.\frac{H_o}{k}.\frac{(1+\tau_e.p)}{1+\left(\tau_{em}+\lambda.\tau_e\right).p+\left(\tau_e.\tau_{em}\right).p^2}$$

avec un modèle simplifié au 1er ordre

$$\frac{\Omega(p)}{C_r(p)} = -\frac{R}{k^2}.\frac{(1+\frac{L}{R}.p)}{1+\left(\frac{R.J}{k^2}\right).p}.C_r(p)$$

Hypothèses :
Pas de couple de pertes
Effets de l'inductance négligés

On obtient finalement la forme la plus utilisée : modèle simplifié au 2nd ordre $\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{H_o}{(1+\tau_{em}.p)(1+\tau_{e.}.p)}$

Dans certaines conditions, $\tau_e << \tau_{em}$ (machine à forte inertie) :

alors on utilise la forme simplifiée au 1er ordre $\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{H_o}{(1+\tau_{em}.p)}$ soit $\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{1/k}{(1+\frac{R.J}{k^2}.p)}$

Les grandeurs caractéristiques :

f	coefficient d'amortissement intrinsèque (frot. Visqueux)
$K_D = \frac{k^2}{R} + f = \frac{J}{\tau_{em}}$	coefficient d'amortissement électromagnétique
$\tau_e = \frac{L}{R}$	constante de temps électrique
$\tau_{em} = \frac{R.J}{k^2+R.f} \approx \frac{R.J}{k^2}$	constante de temps électromécanique (abusivement appelée constante de temps mécanique chez certains constructeurs)
$\tau_m = \frac{J}{f}$	constante de temps mécanique intrinsèque

4.9. Etude vis à vis de la perturbation (Cr(p)) U(p)=0

Apparaît le facteur de régulation $-\frac{R}{k^2}$ qui est la pente de la droite Vitesse - Couple et qui détermine la chute de vitesse causée par une variation du couple résistant de la charge (influence de la chute de tension R.i(t) sur la fem E).

$\frac{R}{k^2}$ facteur de régulation (appelé chute de vitesse à tension constante)

4.10. Modèle complet

$$\Omega(p) = \frac{H_o}{1+\left(\tau_{em}+\lambda.\tau_e\right).p+\left(\tau_e.\tau_{em}\right).p^2}.U(p) - R.\frac{H_o}{k}.\frac{(1+\tau_e.p)}{1+\left(\tau_{em}+\lambda.\tau_e\right).p+\left(\tau_e.\tau_{em}\right).p^2}.C_r(p)$$

4.11. Modèle complet au premier ordre

Hypothèses :

Pas de couple de pertes

Effets de l'inductance négligés

$$\Omega(p)=\frac{1/k}{1+\left(\frac{R.J}{k^2}\right).p}.U(p)-\frac{R}{k^2}.\frac{(1+\frac{L}{R}.p)}{1+\left(\frac{R.J}{k^2}\right).p}.C_r(p)$$

5. DETERMINER EXPERIMENTALEMENT UNE FONCTION DE TRANSFERT

Afin de déterminer le comportement d'un système et éventuellement de le corriger pour répondre à un cahier des charges donné, il est nécessaire d'**identifier** ce système par sa fonction de transfert T(p). Pour cela, différentes techniques sont utilisables et nous nous intéresserons notamment à cette identification à partir d'essai indiciels (commande temporelle en échelon).

Tout système linéaire donne une réponse fréquentielle ou temporelle correspondant à la somme de réponses élémentaires du premier et second ordre. L'essentiel de la réponse dépend du **mode dominant**, c'est-à-dire **le plus lent,** qui est du premier ou second ordre, si bien qu'un système, même d'ordre élevé, peut être apparenté aux caractéristiques d'un système d'ordre 1 ou 2.

5.1. Gain statique :

c'est le gain en régime permanent donc : $K=\frac{S_\infty}{E_\infty}$

5.2. Reconnaître un 1er ordre :

La réponse indicielle ne présente pas de point d'inflexion et la pente à l'origine n'est pas nulle. La forme générale est une exponentielle.

$$T(p)=\frac{K}{1+\tau p}$$ avec K gain statique et τ constante de temps.

Pour déterminer la constante de temps : tangente à l'origine ou temps pour 63% de la valeur finale ou bien temps de réponse à 5% = 3. τ

5.3. Reconnaître un 2nd ordre :

La réponse indicielle présente un point d'inflexion et la pente à l'origine n'est pas nulle (même si on n'observe pas d'oscillation).

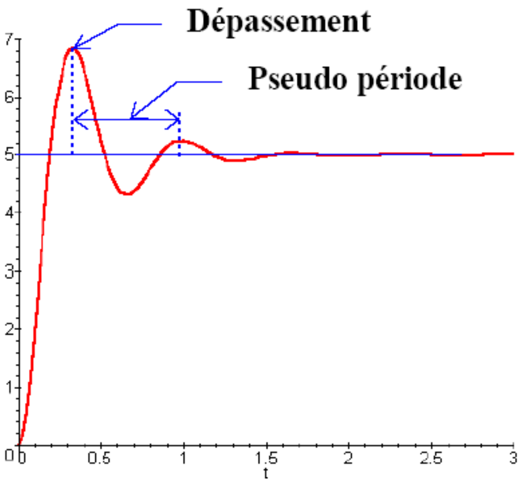
$$T(p)=\frac{K}{1+\frac{2m}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$$ avec K gain statique m amortissement et ω_0 pulsation propre

Si m<1 la réponse est oscillatoire

On peut alors mesurer les dépassements et la pulsation de l'oscillation. On détermine alors m et ω_0 à partir de calculs $\omega_{pa}=\omega_0\sqrt{1-m^2}$

et $d=e^{\frac{-m\pi}{\sqrt{1-m^2}}}$

ou à partir des abaques des temps de réponse à 5% et abaque des dépassements .



Si m≥1 la réponse est non-oscillatoire

On utilise alors d'autres abaques pour retrouver les valeurs souhaitées.