SYSTEME DU PREMIER ORDRE

1 - Définition

Le comportement d'un système du premier ordre est régi par une équation différentielle du 1er degré à coefficients constants :

$$\boxed{T\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=Ke(t)}$$

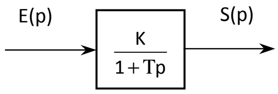
Dans cette équation :

- K est appelé gain statique, il traduit la proportionnalité de la sortie *s* avec l'entrée *e* en régime permanent statique.
- T est appelé constante de temps du système.

Si on suppose $s(0)=0$, alors on peut représenter un système du premier ordre par sa fonction de transfert H(p) :

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{1+Tp}$$

On peut donc représenter un système du 1er ordre par le schéma suivant :



2 - Étude temporelle

2.1 – Réponse à un échelon constant ou réponse indicielle

L'entrée *e* est un échelon constant d'amplitude E_0.

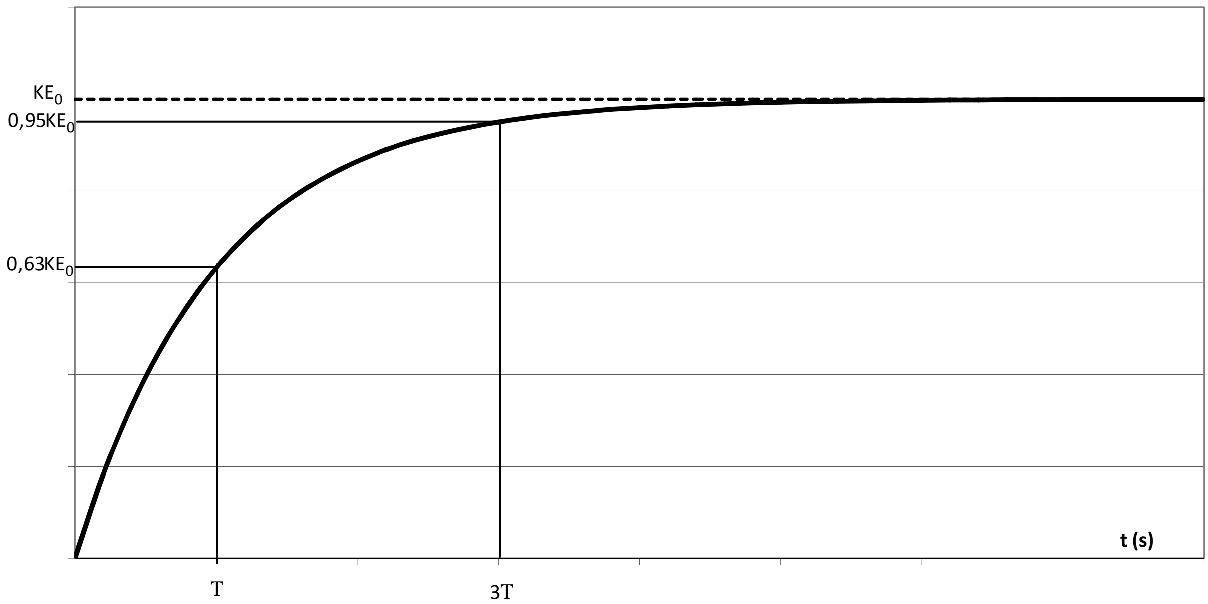
a. expression de S(p)

$$S(p)=\frac{KE_0}{p(1+Tp)}$$

b. transformation inverse

$$s(t)=KE_0\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

Réponse indicielle



- Valeur finale du régime permanent

  C'est la valeur atteinte par la réponse lorsque t tend vers l'infini, on peut la noter s_∞ .

  $$s_\infty=\lim_{t\to+\infty}s(t)=\lim_{p\to0}pS(p)=KE_0$$

- Pente à l'origine

  $$\dot{s}(0)=\lim_{t\to0}\dot{s}(t)=\lim_{p\to+\infty}p\left(pS(p)\right)=\frac{KE_0}{T}$$

- Temps de réponse à 5% ($t_{r5\%}$) ou temps d'établissement

  Pour qualifier la durée du régime transitoire, on introduit le temps de réponse à 5%, $t_{r5\%}$. Ce temps de réponse est le temps nécessaire pour que le signal de sortie s atteigne 95% de sa valeur finale : $s(t_{r5\%})=0{,}95KE_0$.

  On trouve : $t_{r5\%}=(-Ln0{,}05)T\approx3T$

2.2 – Réponse à une rampe

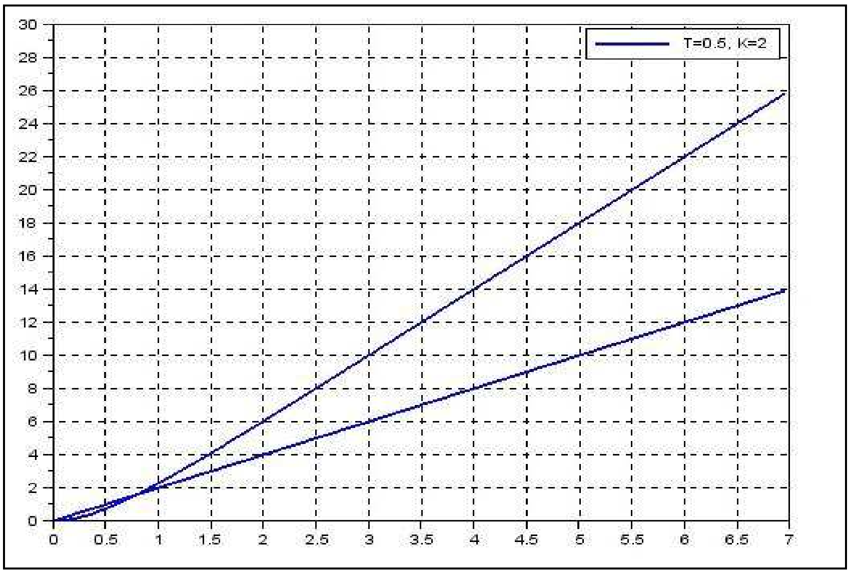
L'entrée *e* est définie par : $e(t) = at$.

Expression de S(p)

$$S(p) = \frac{a}{p^2}\frac{K}{1+Tp}$$

Transformation inverse

$$s(t) = aK\left(t - T + Te^{-\frac{t}{T}}\right)$$



2.3 – Réponse impulsionnelle

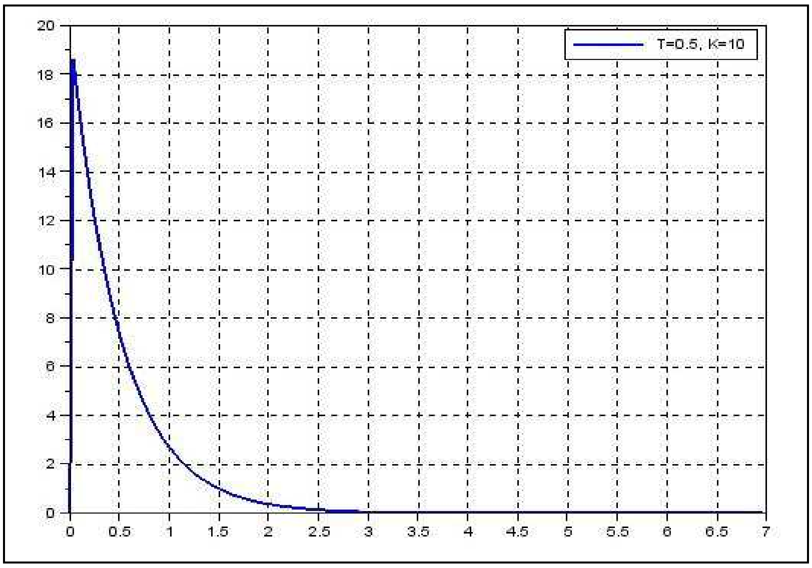
L'entrée *e* est une impulsion ou un Dirac.

Expression de S(p)

$$S(p) = \frac{K}{1+Tp}$$

Ttransformation inverse

$$s(t) = \frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}}$$



3 - Étude fréquentielle – Analyse harmonique

3.1 - Fonction de transfert harmonique ou isochrone

En utilisant les notations complexes, la fonction de transfert est : $H(i\omega) = \frac{K}{1+i\omega T}$

On en déduit :

- le gain (ou rapport d'amplitude) en décibels $G_{dB}(\omega)$: $G_{dB}(\omega) = 20\log_{10}\frac{K}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}$
- la phase $\varphi(\omega)$: $\varphi(\omega) = -\arctan\omega T$ car $\varphi(\omega) \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

3.2 - Pulsation de coupure à 3dB : ω_{3dB} ou ω_C

C'est la pulsation à partir de laquelle la réponse harmonique du système est atténuée d'au moins 3dB. À partir de cette pulsation, l'amplitude du signal de sortie est atténuée d'au moins 30% par rapport à l'amplitude obtenue pour de faibles pulsations.

$$\omega_c = \omega_{3dB} \approx \frac{1}{T}$$

3.3 - Diagramme de Bode

- Tracé asymptotique

	$\omega T << 1$	$\omega = \frac{1}{T}$	$\omega T >> 1$
$H(i\omega)$	$H(i\omega) = K$ valable jusqu'à $\omega = \frac{1}{T}$		$H(i\omega) = \frac{K}{i\omega T}$ valable à partir de $\omega = \frac{1}{T}$
Gain en décibels	$20\log\lvert H(i\omega)\rvert \approx 20\log K$	$20\log K$	$20\log\lvert H(i\omega)\rvert \approx 20\log\frac{K}{\omega T}$
Phase	$\mathrm{Arg}\,H(i\omega) \approx 0°$	$-45°$	$\mathrm{Arg}\,H(i\omega) \approx -90°$

- Tracé des courbes réelles

ω	$\frac{\omega_C}{16}$	$\frac{\omega_C}{8}$	$\frac{\omega_C}{4}$	$\frac{\omega_C}{2}$	ω_C	$2\omega_C$	$4\omega_C$	$8\omega_C$	$16\omega_C$
$\varphi(\omega)$	– 3,5°	– 7°	– 14°	– 26,5°	– 45°	– 63,5°	– 76°	– 83°	– 86,5°
$(G_{dB}(\omega))_{réel} - (G_{dB}(\omega))_{asympt}$	≈ 0dB			– 1 dB	– 3 dB	– 1 dB	≈ 0dB		

Tracés pour $K = 10$ et $T = 0,5$ s