SYSTEME DU DEUXIEME ORDRE

ETUDE HARMONIQUE

On appelle système du deuxième ordre, tout système dont le fonctionnement est régi par une équation différentielle à coefficients constants du deuxième ordre .

Pour un système d'entrée e(t) et de sortie s(t), après utilisation de la transformation de Laplace, on obtient la fonction de transfert :

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

avec ξ : coefficient d'amortissement (noté parfois m ou z), $\xi>0$

ω_0 : pulsation propre non amortie (notée également ω_n), $\omega_0>0$

En remplaçant p par $i\omega$ dans l'expression de la fonction de transfert, on obtient la fonction de transfert complexe :

$$H(i\omega)=\frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}i\omega-\frac{1}{\omega_0^2}\omega^2}$$

Soit : $\boxed{H(i\omega)=\frac{K}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)+i\frac{2\xi\omega}{\omega_0}}}$ ou encore $H(i\omega)=\frac{K\omega_0^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+2i\xi\omega\omega_0}$

Gain

Par définition, $G(\omega)=|H(i\omega)|$. On a alors pour un système du deuxième ordre :

$$G(\omega)=|H(i\omega)|=\frac{K}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{4\xi^2\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

ou encore en posant $u=\frac{\omega}{\omega_0}$ appelée pulsation réduite :

$$G(u)=\frac{K}{\sqrt{\left(1-u^2\right)^2+(2\xi u)^2}}.$$

On montre alors que, pour $\xi<\frac{\sqrt{2}}{2}$, la valeur de l'amplitude admet un maximum appelé résonance.

La pulsation correspondante, notée ω_R, appelée pulsation de résonance est telle que : $\boxed{\omega_R=\omega_0\sqrt{1-2\xi^2}}$.

On a alors : $G_{max}=G(\omega_R)=\frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$.

On peut définir un **facteur de surtension** ou facteur de résonance : $\boxed{Q=\frac{|H(i\omega_R)|}{\lim\limits_{\omega\to 0}|H(i\omega)|}=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}}$

Phase

La phase est définie par $\varphi(\omega)=\arg\left(H(i\omega)\right)$, on a donc pour un deuxième ordre : $\varphi(\omega)=-\arg\left(\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)+i\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)$ si $K>0$. On a alors :

- si $\omega<\omega_0$, les parties réelle et imaginaire de $\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)+i\frac{2\xi\omega}{\omega_0}$ sont positives, on a : $\arg\left(\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)+i\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

  On peut écrire : $\varphi(\omega)=-\arctan\left(\frac{2\xi\omega/\omega_0}{1-\omega^2/\omega_0^2}\right)$ ou encore avec la pulsation réduite u : $\varphi(u)=-\arctan\left(\frac{2\xi u}{1-u^2}\right)$,

- si $\omega=\omega_0$ alors $\varphi(\omega)=-\frac{\pi}{2}$,

- si $\omega>\omega_0$, la partie réelle $\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)+i\frac{2\xi\omega}{\omega_0}$ est négative et sa partie imaginaire est positive, on a : $\arg\left(\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)+i\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

  On peut écrire $\varphi(\omega)=-\arctan\left(\frac{2\xi\omega/\omega_0}{1-\omega^2/\omega_0^2}\right)-\pi$ ou encore : $\varphi(u)=-\arctan\left(\frac{2\xi u}{1-u^2}\right)-\pi$

Diagramme asymptotique de Bode

- Pour $\omega \ll \omega_0$,

  on a : $H(i\omega) \approx K$

  donc $G_{dB}(\omega) = 20\log K$.

  et $\varphi(\omega) = 0°$.

- Pour $\omega = \omega_0$

  on a : $\varphi(\omega_0) = -90°$.

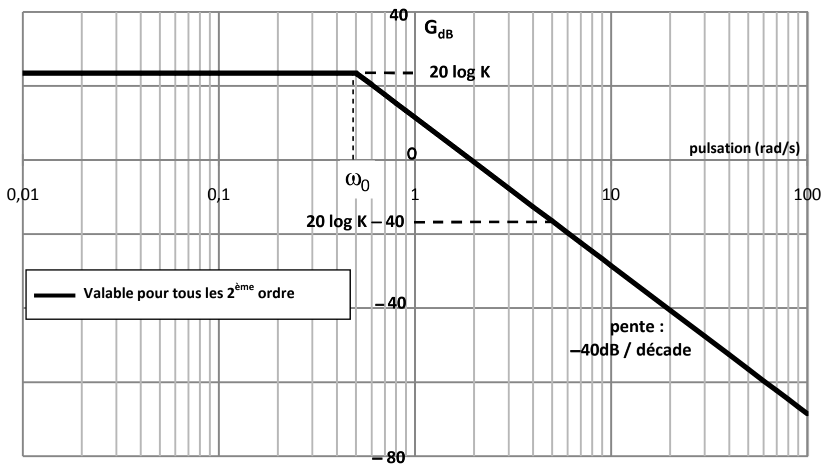
  $G_{dB}(\omega_0) = 20\log K$

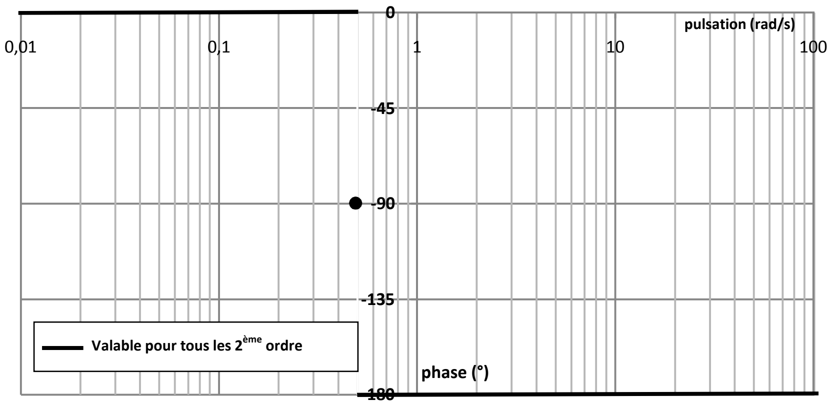
- Pour $\omega \gg \omega_0$,

  on a $H(i\omega) \approx -\dfrac{K}{\omega^2/\omega_0^2}$

  donc $G_{dB}(\omega) = 20\log K - 40\log\dfrac{\omega}{\omega_0}$

  et $\varphi(\omega) = -180°$.





Système apériodique :

$$H(i\omega) = \frac{K}{(1+i\omega T_1)(1+i\omega T_2)}$$

- Pour $\omega < \dfrac{1}{T_1}$,

  on a : $H(i\omega) \approx K$

  donc $G_{dB}(\omega) = 20\log K$

  et $\varphi(\omega) = 0°$

- Pour $\dfrac{1}{T_1} < \omega < \dfrac{1}{T_2}$,

  on a $H(i\omega) \approx \dfrac{K}{i\omega T_1}$

  donc $G_{dB}(\omega) = 20\log K - 20\log T_1$

  et $\varphi(\omega) = -90°$.

- Pour $\omega > \dfrac{1}{T_2}$,

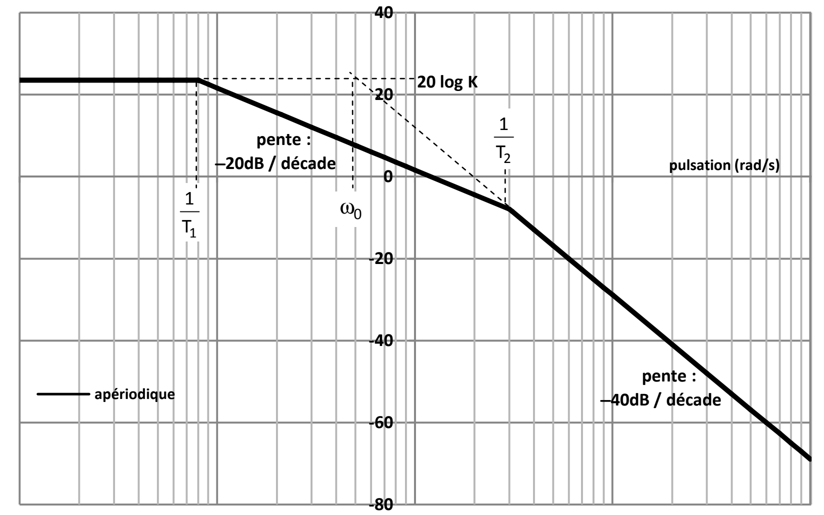
  on a $H(i\omega) \approx -\dfrac{K}{\omega T_1 T_2}$

  donc $G_{dB}(\omega) = 20\log K - 20\log T_1 - 20\log T_2$

  et $\varphi(\omega) = -180°$.

Et on a toujours : $\varphi(\omega_0) = -90°$.

avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$



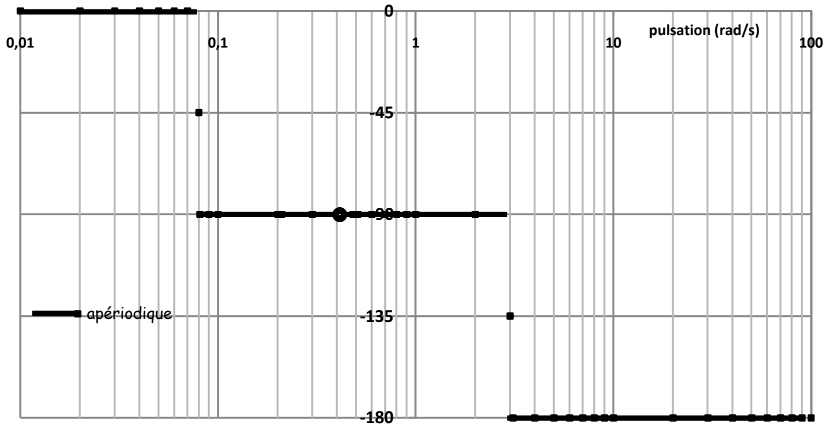
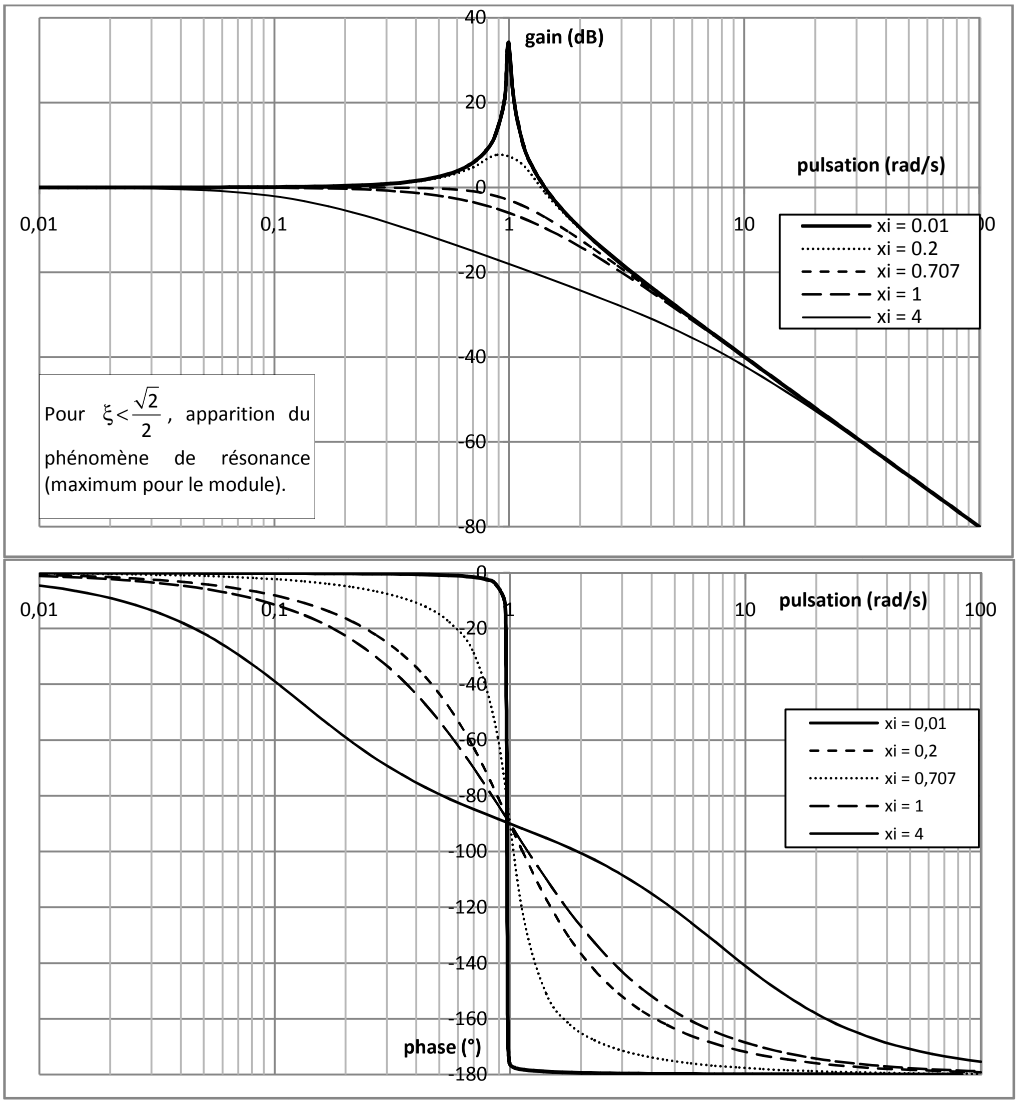


Diagramme de Bode réel de systèmes du deuxième ordre : tracés pour $H(i\omega)=\dfrac{1}{1+0{,}2\xi i\omega+0{,}01(i\omega)^2}$



On distingue plusieurs pulsations :

- ω_0 pulsation propre non amortie
- ω_p pseudo pulsation : elle existe si $\xi<1$: $\omega_p=\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$
- ω_R pulsation de résonance : elle existe si $\xi<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$: $\omega_R=\omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$

Remarque : Si toutes ces pulsations existent on a : $\omega_R\le\omega_p\le\omega_0$.