SYSTEME DU DEUXIEME ORDRE

ETUDE TEMPORELLE

On appelle système du deuxième ordre, tout système dont le fonctionnement est régi par une équation différentielle à coefficients constants du deuxième ordre .

Pour un système d'entrée e(t) et de sortie s(t), après utilisation de la transformation de Laplace, on obtient la fonction de transfert :

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

avec ξ : coefficient d'amortissement (noté parfois m ou z), $\xi>0$

ω_0 : pulsation propre non amortie (notée également ω_n), $\omega_0>0$

Selon la valeur de ξ, le dénominateur peut ou non se décomposer en éléments simples :

- si $\xi>1$, $H(p)=\frac{K}{(1+T_1p)(1+T_2p)}$, on parle de régime apériodique
- si $\xi=1$, $H(p)=\frac{K}{(1+Tp)^2}$, on parle de régime apériodique critique
- si $\xi<1$, la fonction de transfert a deux pôles complexes conjugués $H(p)=\frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}$ on a un régime oscillatoire.

Réponse indicielle

En utilisant le théorème de la valeur finale et celui de la valeur initiale, on trouve que :

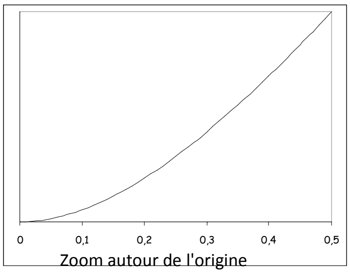
- la réponse tend vers KE_0.
- la pente à l'origine est nulle (différence majeure avec un premier ordre)

Cas du régime apériodique ($\xi>1$)

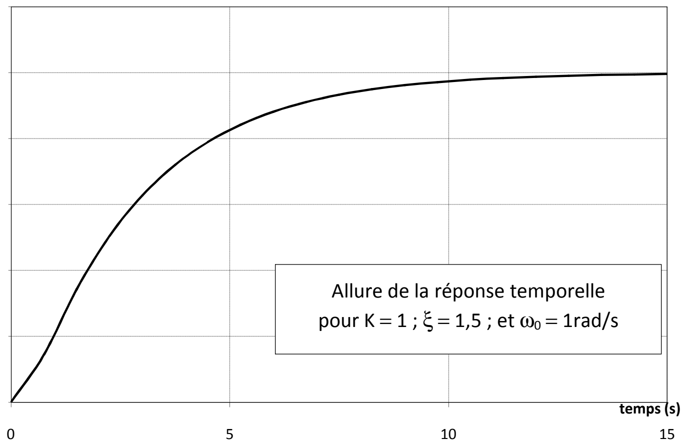
On a : $S(p)=\frac{KE_0}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}$, après transformation inverse, il vient : $s(t)=KE_0\left[1+\frac{1}{T_2-T_1}\left[T_1e^{-\frac{t}{T_1}}-T_2e^{-\frac{t}{T_2}}\right]\right]$

avec $T_1=\frac{1}{\omega_0\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)}$

et $T_2=\frac{1}{\omega_0\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)}$

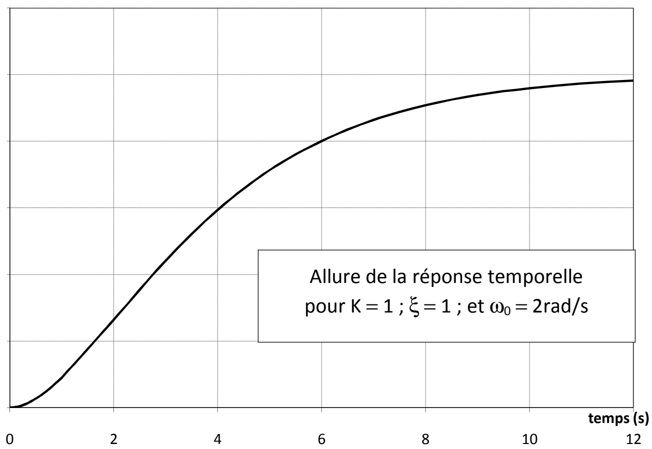


Zoom autour de l'origine



Cas du régime apériodique critique ($\xi=1$)

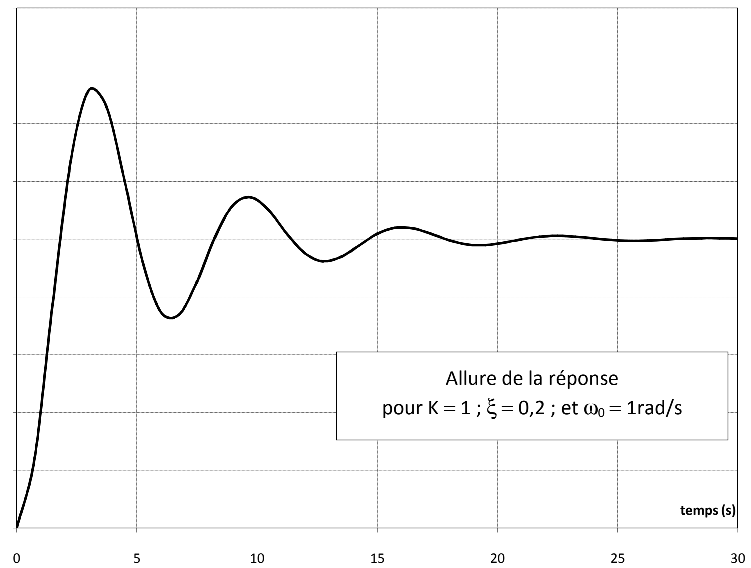
On a : $S(p)=\frac{KE_0}{p(1+Tp)^2}$, et après transformation inverse, il vient : $s(t)=KE_0\left[1-e^{-\frac{t}{T}}-\frac{t}{T}e^{-\frac{t}{T}}\right]$ avec $T=\frac{1}{\omega_0}$



Cas du régime oscillatoire ($\xi < 1$) :

On a : $S(p) = \dfrac{KE_0\omega_0^2}{p\left(\omega_0^2 + 2\xi\omega_0 p + p^2\right)}$ et après transformation inverse, il vient :

$$s(t) = KE_0\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_0 t}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t + \varphi\right)\right] \text{ avec } \sin\varphi = \sqrt{1-\xi^2} \text{ et } \cos\varphi = \xi$$



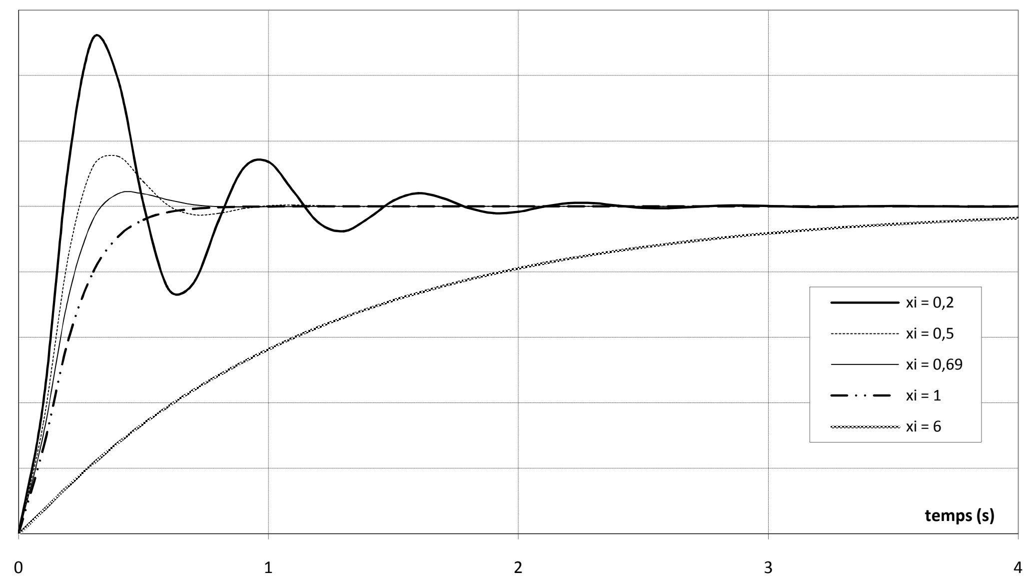
Remarques :

- L'allure dépend essentiellement de ξ.
  - pour $\xi > 0{,}69$ les oscillations sont imperceptibles
  - pour $\xi < 0{,}69$ le système est réellement oscillant.

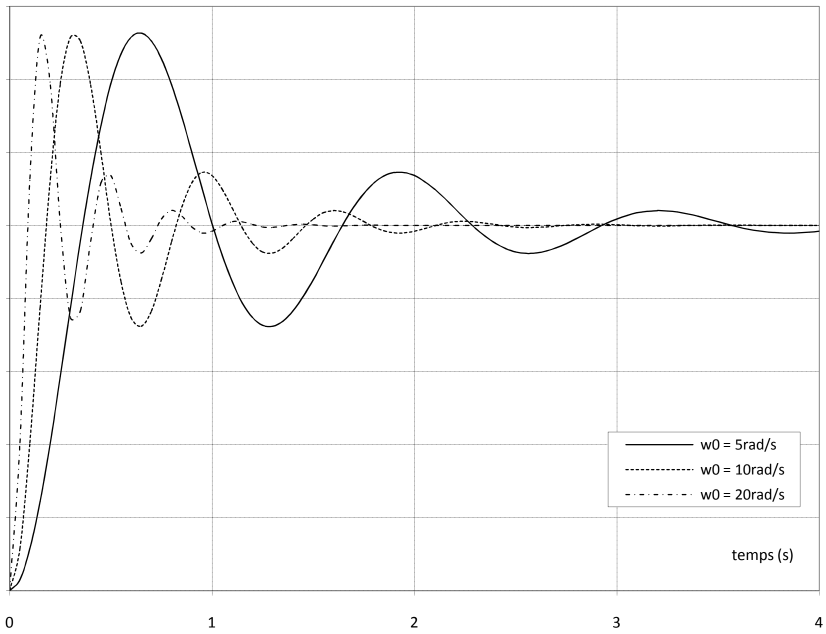
Définition

T_p : pseudo période de la sinusoïde telle que $T_p = \dfrac{2\pi}{\omega_p}$ avec ω_p la pseudo pulsation telle que : $\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$.

Influence de ξ sur l'allure de la réponse



Influence de ω_0 sur l'allure de la réponse

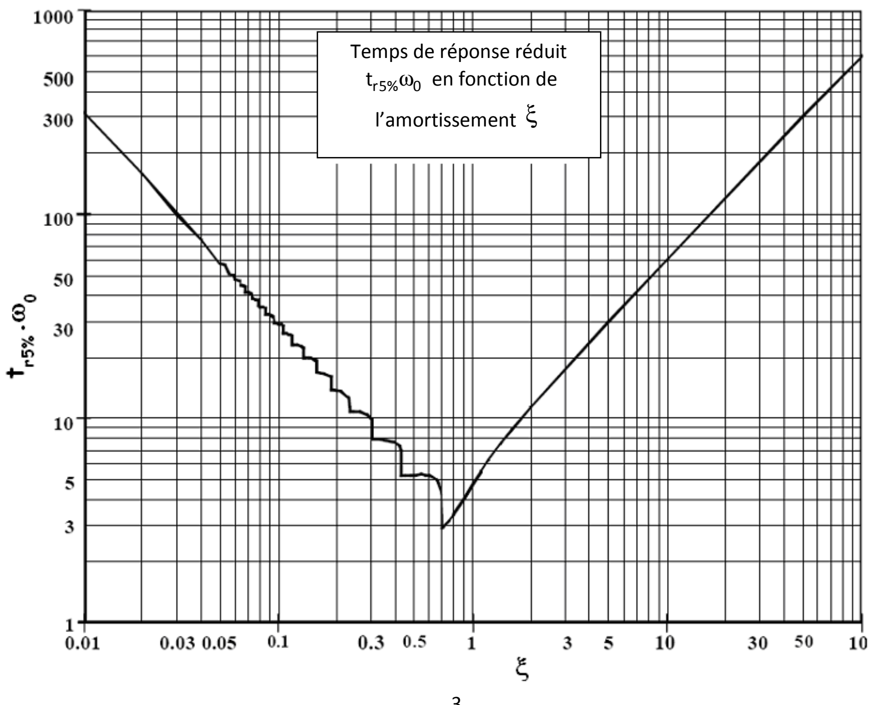


La valeur de la pulsation propre non amortie influe sur le temps de réponse même en régime apériodique.

Temps de réponse à 5%

Pour un système du deuxième ordre on ne sait pas exprimer par une expression analytique la valeur du temps de réponse. Par contre numériquement on est capable de tracer le temps de réponse réduit t_{rr} tel que $t_{rr} = t_{r5\%}\omega_0$ en fonction de ξ.

Pour $\xi = 0{,}69$, on a un bon compromis entre rapidité et dépassement, on a $t_{r5\%}\omega_0 \approx 3$. le dépassement n'excède pas 5%.



Pour $\xi < 0{,}69$, on utilise également l'expression approchée : $t_{r5\%}\omega_0 \approx \frac{3}{\xi}$.

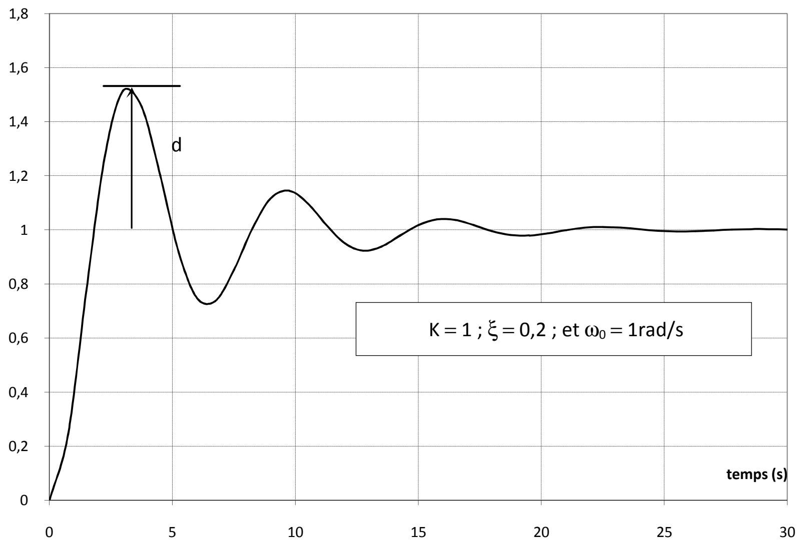
Pour $\xi = 0{,}69$, on a un bon compromis entre rapidité et dépassement, on a $t_{r5\%}\omega_0 \approx 3$.

Pour $\xi > 0{,}69$, on utilise également l'expression approchée : $t_{r5\%}\omega_0 \approx 5\xi$.

Dépassements en régime transitoire

Pour ξ inférieur à 1, la réponse oscille avec un ou plusieurs dépassements. On définit :

- le dépassement absolu : $d = KE_0 e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$
- le dépassement relatif : $D = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ ou éventuellement $D\% = 100e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$.
- le temps du premier maximum ou temps de pic : $t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{T_p}{2}$.



Evolution des dépassements