

Résistance des matériaux

Chapitre 1 : le torseur de cohésion

F. BLASCHECK

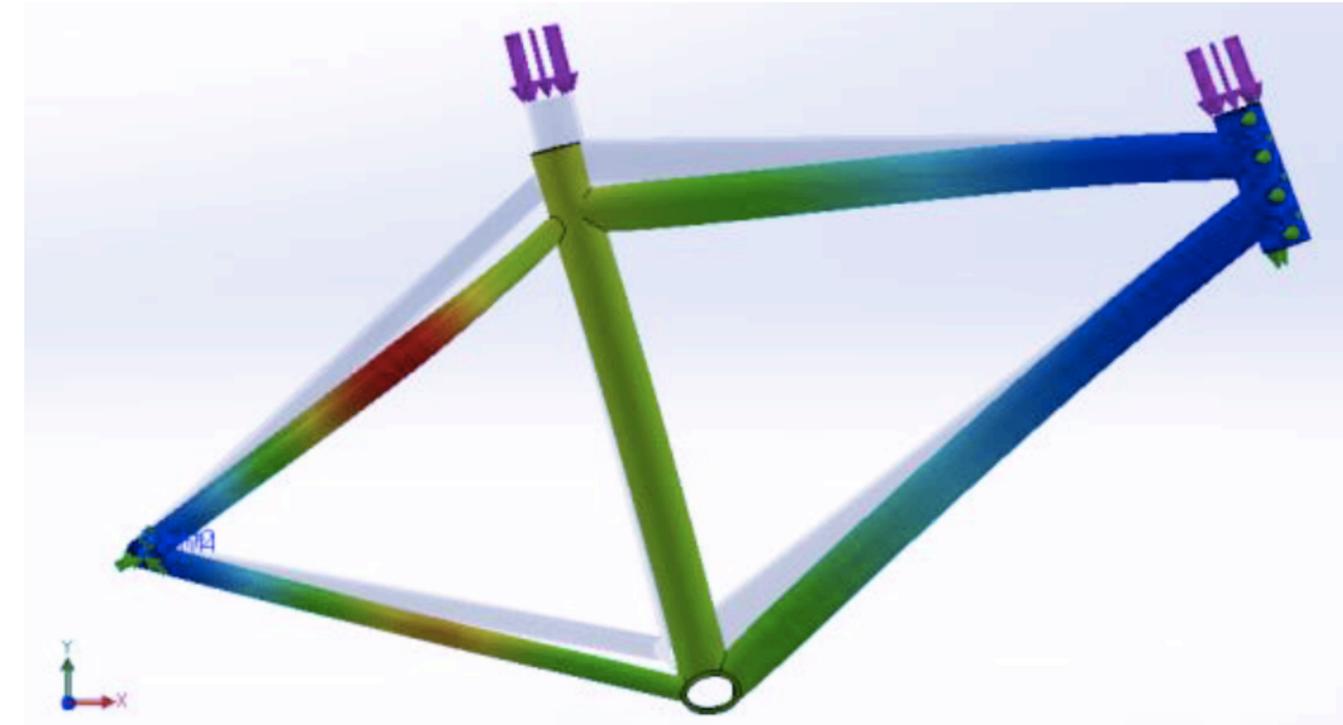
Chapitre 1 : le torseur de cohésion

1. Objectifs
2. Les matériaux : hypothèses et caractéristiques
3. Le modèle « poutre »
4. Les liaisons au bâti : les appuis
5. Le torseur de cohésion
6. Les sollicitations
7. Exercice de cours

1. Objectifs

L'objectif de la **résistance des matériaux** (RDM) est l'étude de la résistance d'une structure sous l'effet d'un chargement :

- calculer **les contraintes** internes ;
- déterminer **les déformations** ;
- vérifier ou optimiser **la tenue mécanique**.



Déformée d'un cadre de vélo (sous SOLIDWORKS)

2. Les matériaux : hypothèses et caractéristiques

La structure étudiée est composée de **solides qui sont donc déformables**. Les matériaux constituant les solides ont chacun des propriétés mécaniques propres. Ils seront considérés :

- **continus** : la matière est considérée continue, sans vide ;
- **homogènes** : la matière est uniformément répartie dans tout le volume ;
- **isotropes** : les caractéristiques mécaniques sont identiques dans toutes les directions.

2. Les matériaux : hypothèses et caractéristiques

Les caractéristiques mécaniques principales des matériaux sont :

- la **masse volumique** ρ en $kg \cdot m^{-3}$;
- le **module d'élasticité d'Young** E en MPa ;
- le **coefficient de Poisson** ν (sans unité) ;
- la **limite élastique** R_e en MPa .

2. Les matériaux : hypothèses et caractéristiques

masse volumique
 ρ ($kg \cdot m^{-3}$)

module d'élasticité
d'Young E (MPa)

coefficient de Poisson
 ν (sans unité)

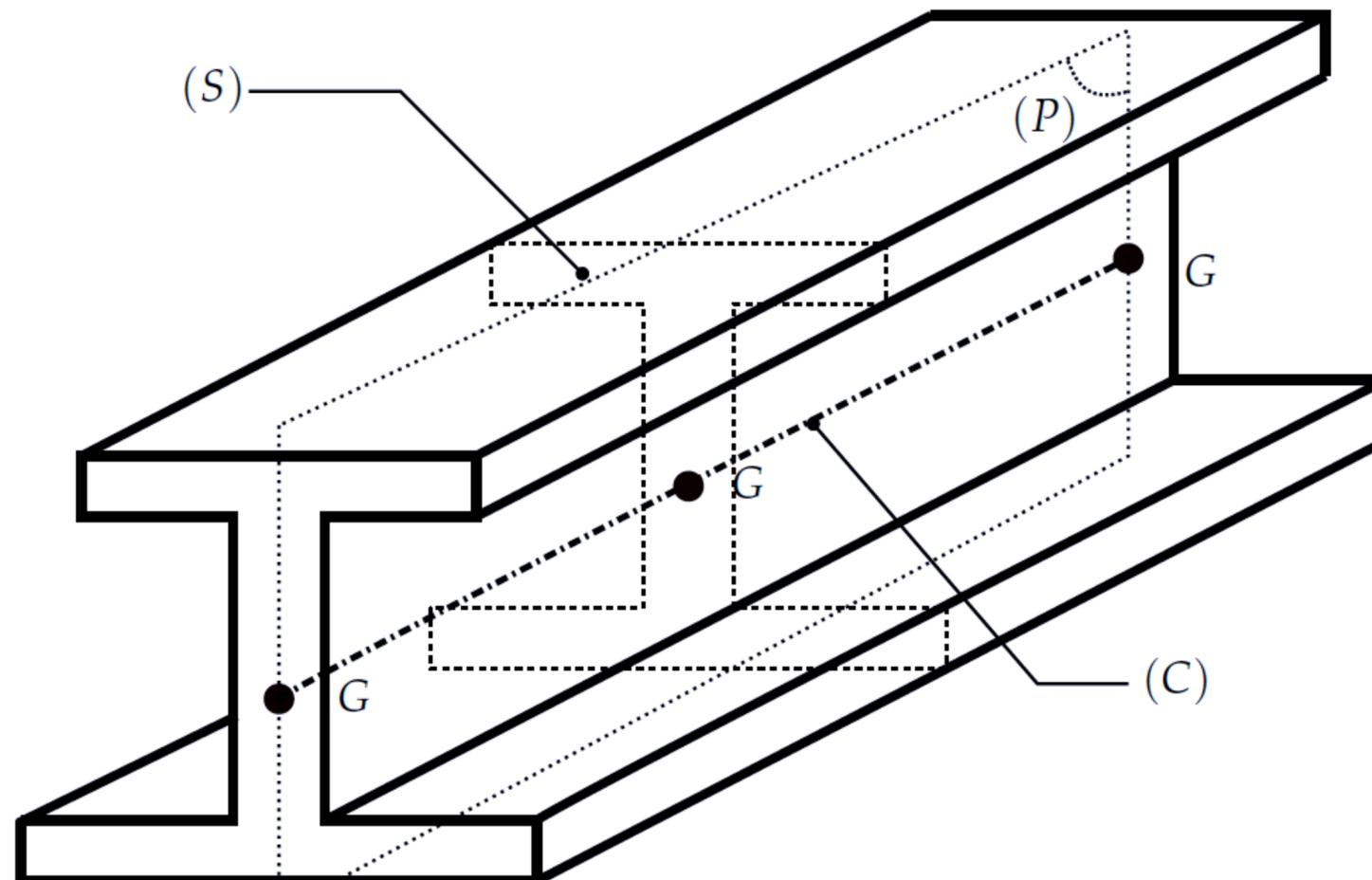
limite élastique
 R_e (MPa)

Acier	7800	210 000	0,3	180-600
Aluminium	2710	70 000	0,34	20-130
Béton	2400	35 000	0,2	1,6-4,1
Bois	400-680	12 000	0,29	10-60
Fémur		17 200		

3. Le modèle « poutre »

Les structures étudiées dans ce cours seront simples, elles seront considérées comme **une association de poutres : un solide long et fin.**

On appelle **poutre**, un solide engendré (P) par une **section** plane (S) dont le centre de surface (G) décrit une courbe plane (C) appelée **ligne moyenne**.

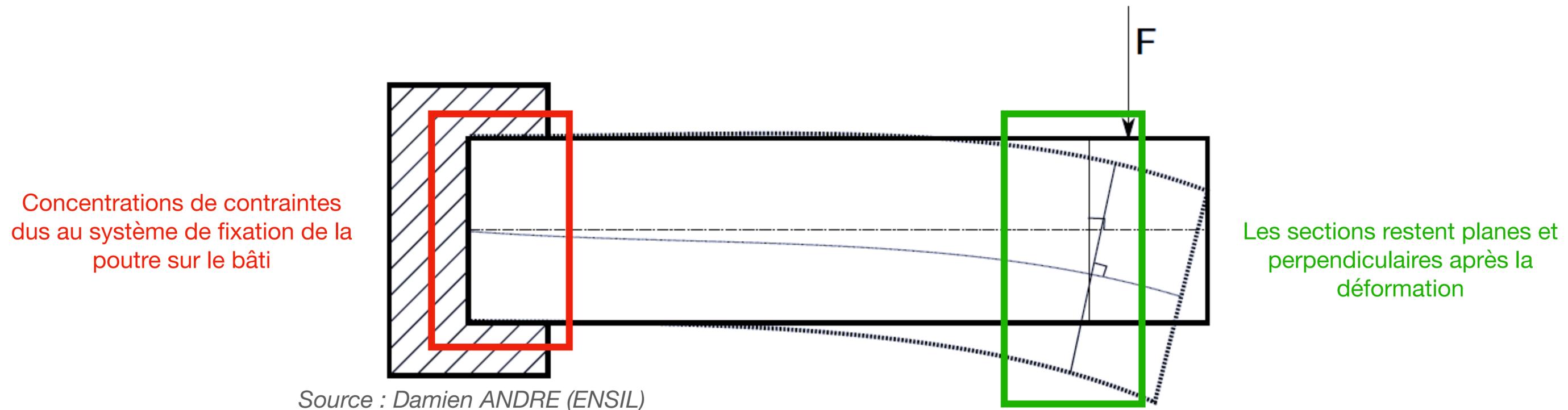


Source : Damien ANDRE (ENSIL)

3. Le modèle « poutre »

Si le rapport longueur / largeur est assez grand alors :

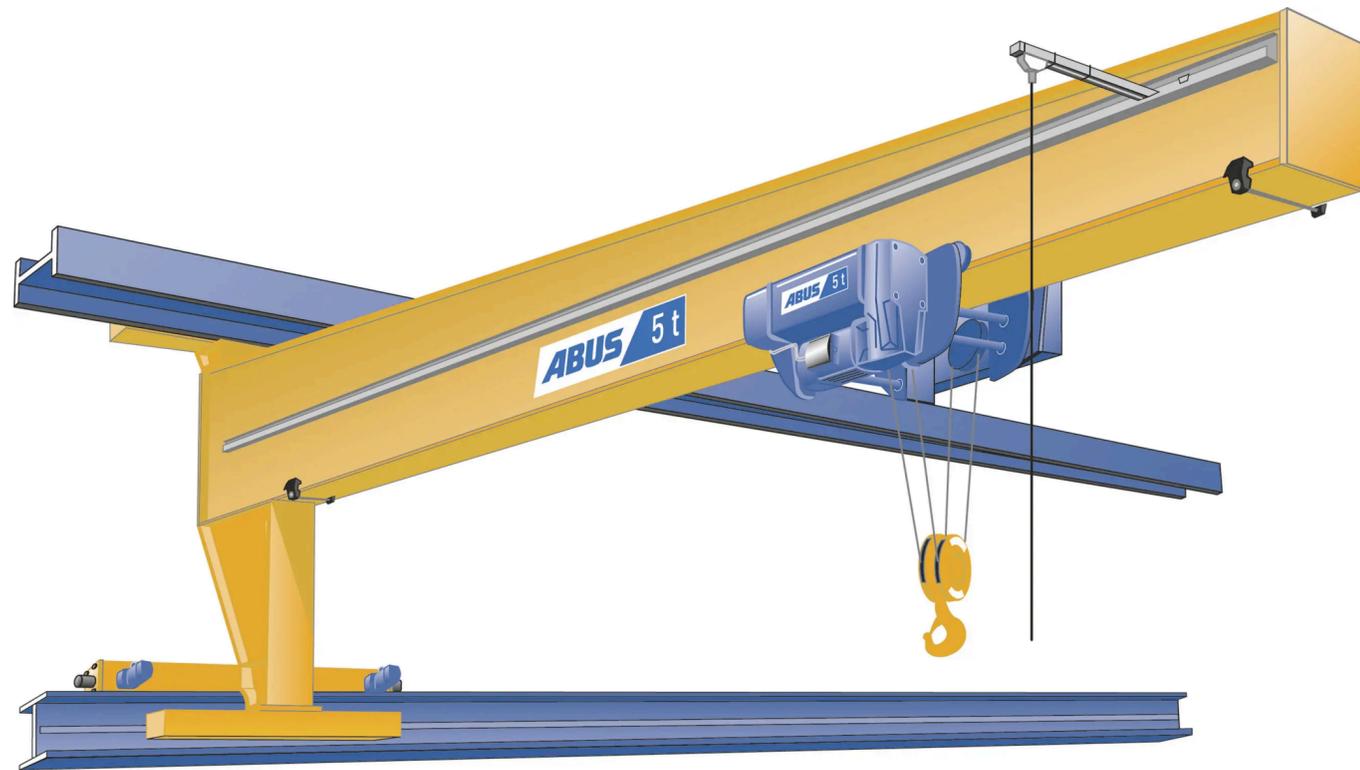
- les sections (S) **restent planes et perpendiculaires à la ligne moyenne** (*hypothèse de Navier-Bernoulli*) ;
- les résultats obtenus ne seront valables que **loin des appuis** (*hypothèse de Barré de Saint Venant*).



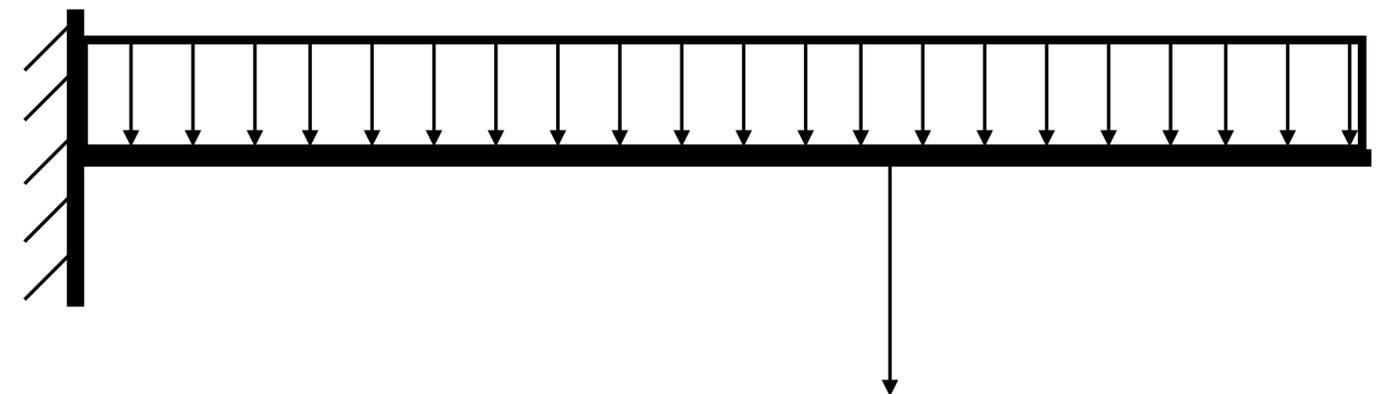
3. Le modèle « poutre »



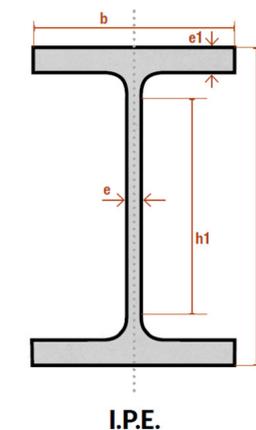
3. Le modèle « poutre »



Réel



Modèle « poutre »



POUTRE = matériau + section + chargement + appuis

4. Les liaisons au bâti : les appuis

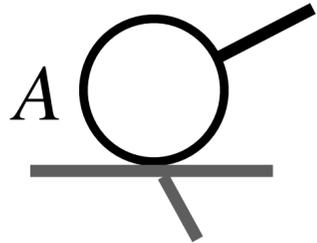
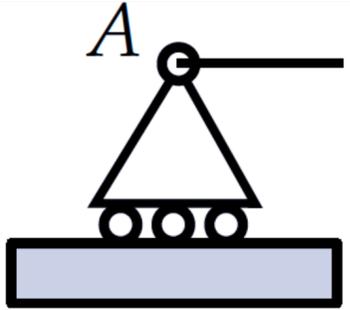
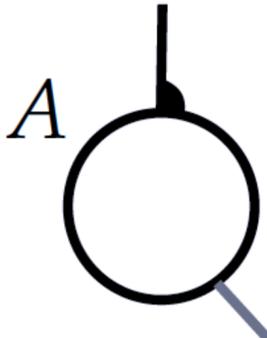
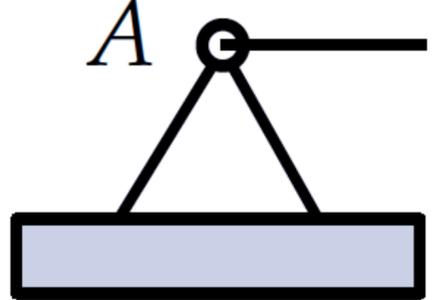
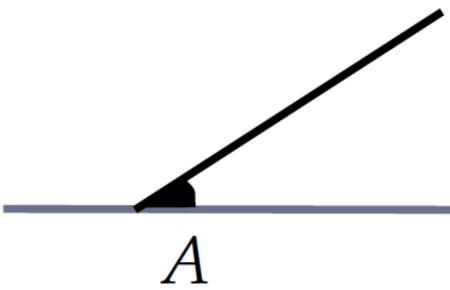
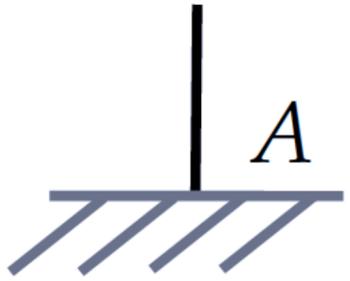
Les liaisons au bâti (ce que l'on appelle **les appuis**) d'une poutre sont de trois types :

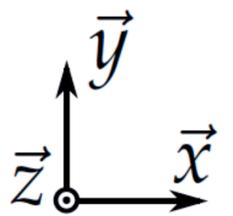
- les **appuis simples** ;
- les **articulations** ;
- les **encastrements**.

Ces appuis transmettent chacun des efforts différents et ont un impact sur la déformation de la poutre et les contraintes internes. **Plus la poutre est libre, moins elle est contrainte.**

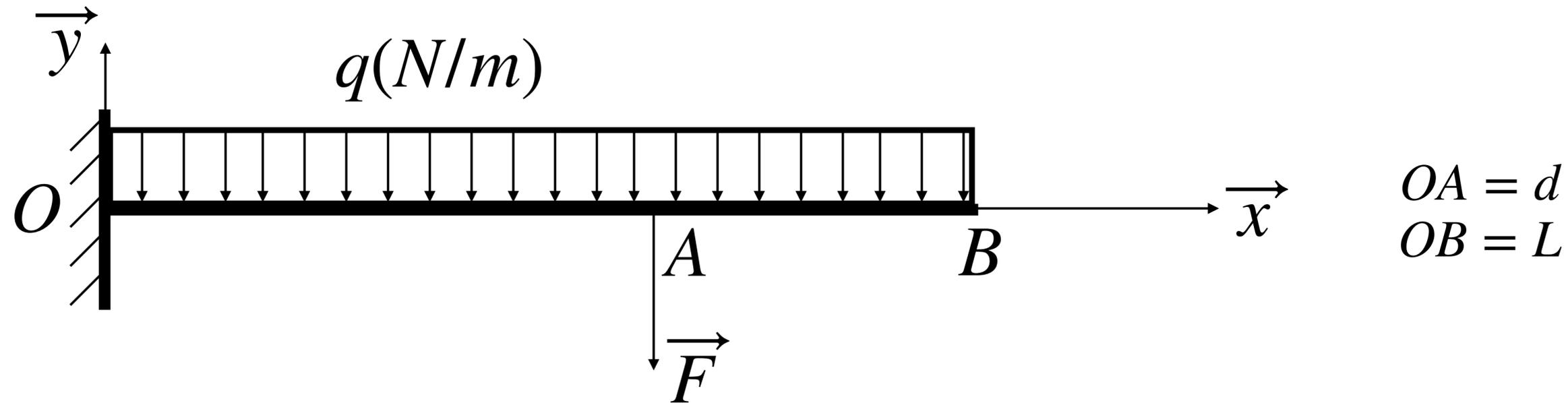
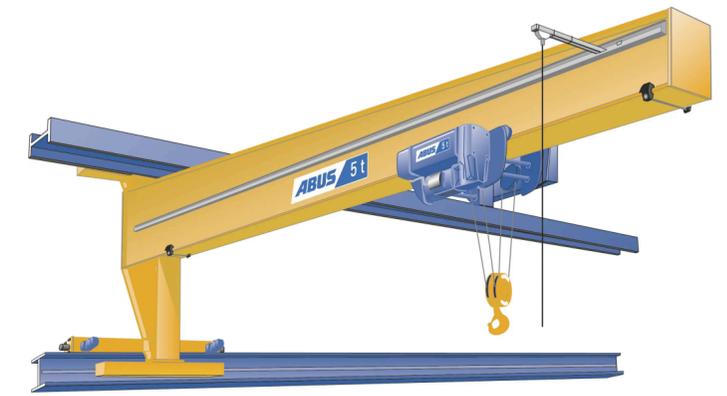
Il est important de reconnaître ces différents appuis et de savoir calculer les efforts qui y ont transmis.

4. Les liaisons au bâti : les appuis

	Symbole mécanique	Symbole génie civil	Degré(s) de liberté	Effort transmissible
Appui simple			3R + 2T	
	Liaison sphère plan			
Articulation			1R	
	Liaison pivot			
Encastrement			Aucun	



4. Les liaisons au bâti : les appuis

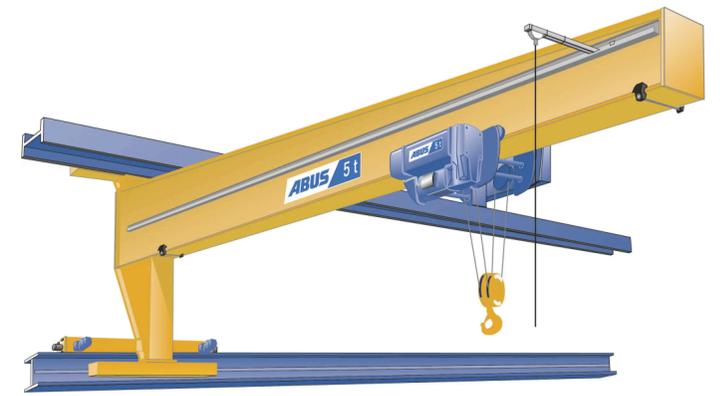
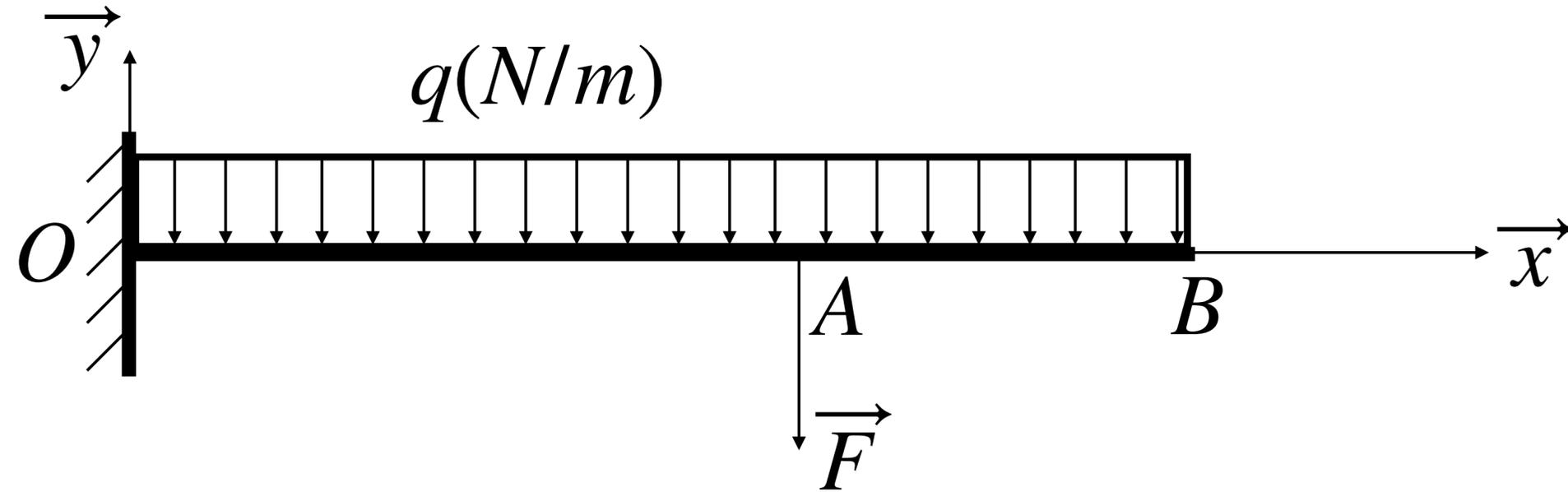


La première étape de l'étude d'une poutre est de **calculer les efforts aux appuis** en fonction des dimensions et du chargement.

Pour cela, on applique **le PFS en isolant la poutre**.

On choisira toujours le point où il y a **le plus d'inconnues statiques**.

4. Les liaisons au bâti : les appuis



$$OA = d$$
$$OB = L$$



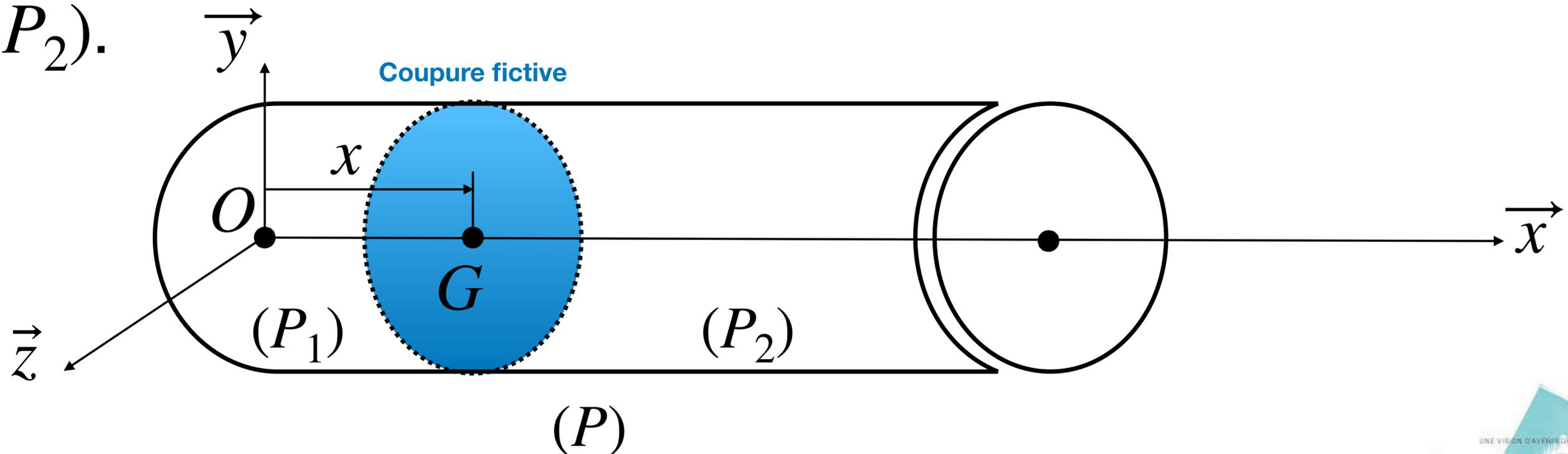
4. Les liaisons au bâti : les appuis



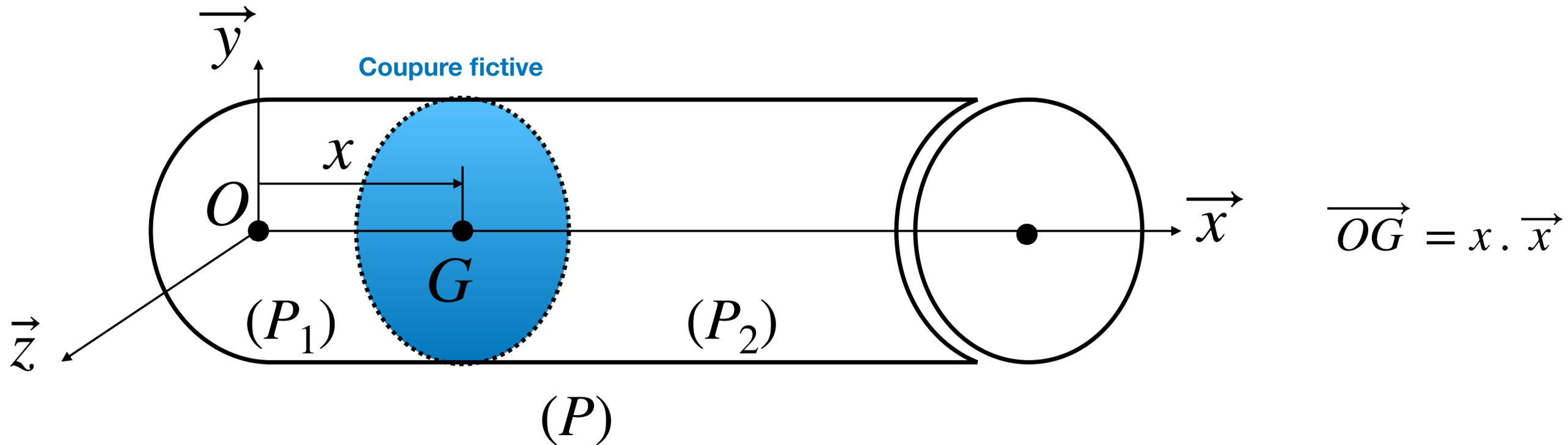
5. Le torseur de cohésion

Nous connaissons la forme de la poutre, son chargement ainsi que les efforts sur les appuis. Il faut maintenant **entrer dans la poutre** pour regarder **les efforts de cohésion exercés dans la matière**.

Pour cela nous considérons une poutre (P) (ici de section circulaire), et nous allons réaliser **une coupure fictive** perpendiculaire à ligne moyenne (C) découpant ainsi la poutre en **deux tronçons distincts** (P_1) et (P_2).



5. Le torseur de cohésion



L'ensemble des actions mécaniques exercées par **le tronçon (P₂) sur le tronçon (P₁)** au travers de la coupure fictive en G est appelé le **torseur de cohésion** :

$$\{T_{coh}\}_G = \{T_{P_2 \rightarrow P_1}\}_G = \begin{Bmatrix} N_x & M_{tx} \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}_{G, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

5. Le torseur de cohésion

Or en isolant successivement (P_1) et (P_2), on peut écrire :

$$\boxed{\left\{ T_{P_2 \rightarrow P_1} \right\}_G} + \left\{ T_{\bar{P} \rightarrow P_1} \right\}_G = 0$$

$$-\left\{ T_{coh} \right\}_G \boxed{\left\{ T_{P_1 \rightarrow P_2} \right\}_G} + \left\{ T_{\bar{P} \rightarrow P_2} \right\}_G = 0$$

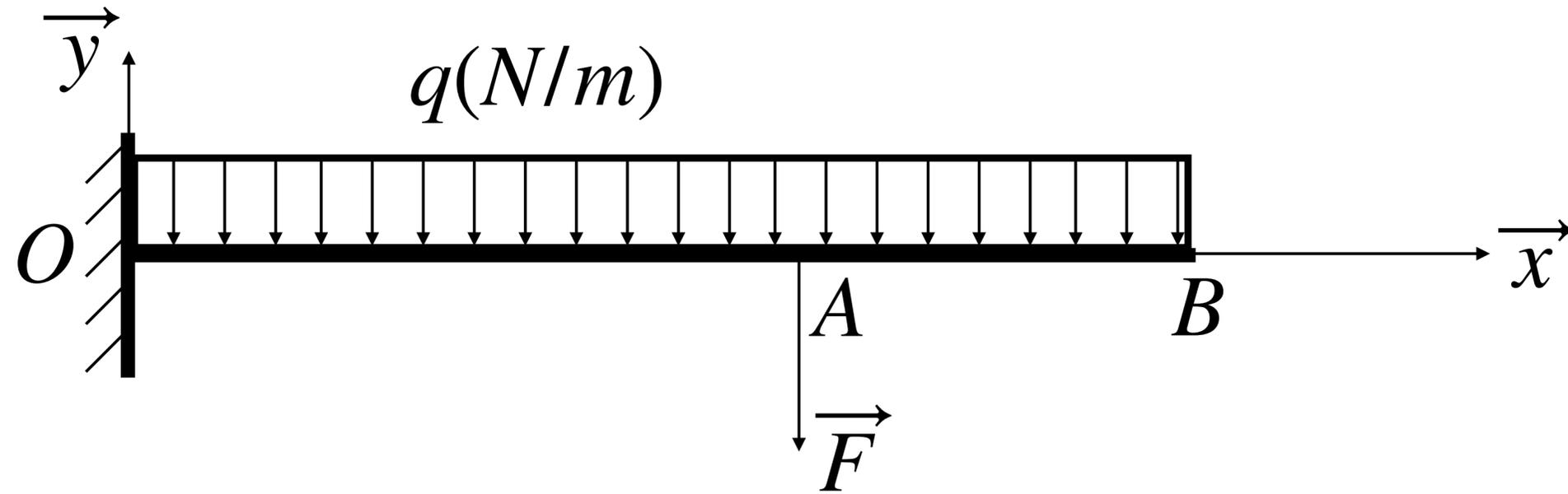
$$\boxed{\left\{ T_{coh} \right\}_G = - \left\{ T_{\bar{P} \rightarrow P_1} \right\}_G}$$

OU

$$\boxed{\left\{ T_{coh} \right\}_G = + \left\{ T_{\bar{P} \rightarrow P_2} \right\}_G}$$

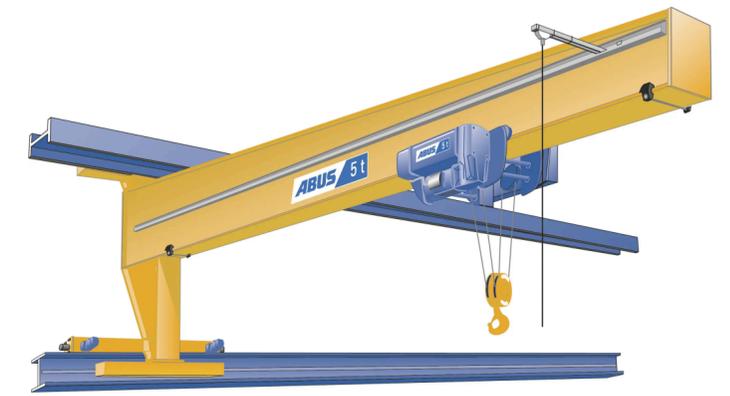
Le torseur de cohésion se détermine en faisant **la somme des efforts sur le tronçon de droite** OU **la soustraction des efforts sur le tronçon de gauche.**

5. Le torseur de cohésion

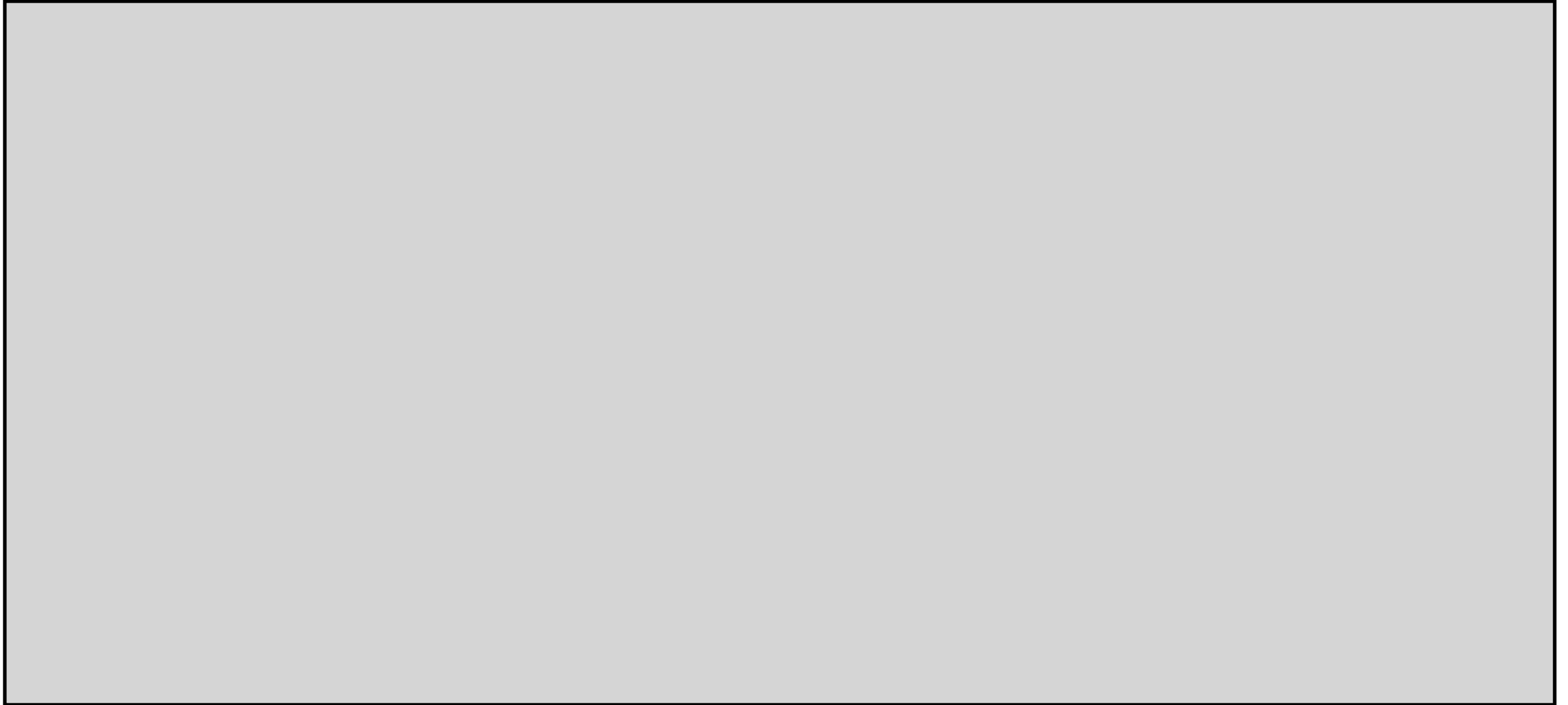


$$OA = d$$

$$OB = L$$

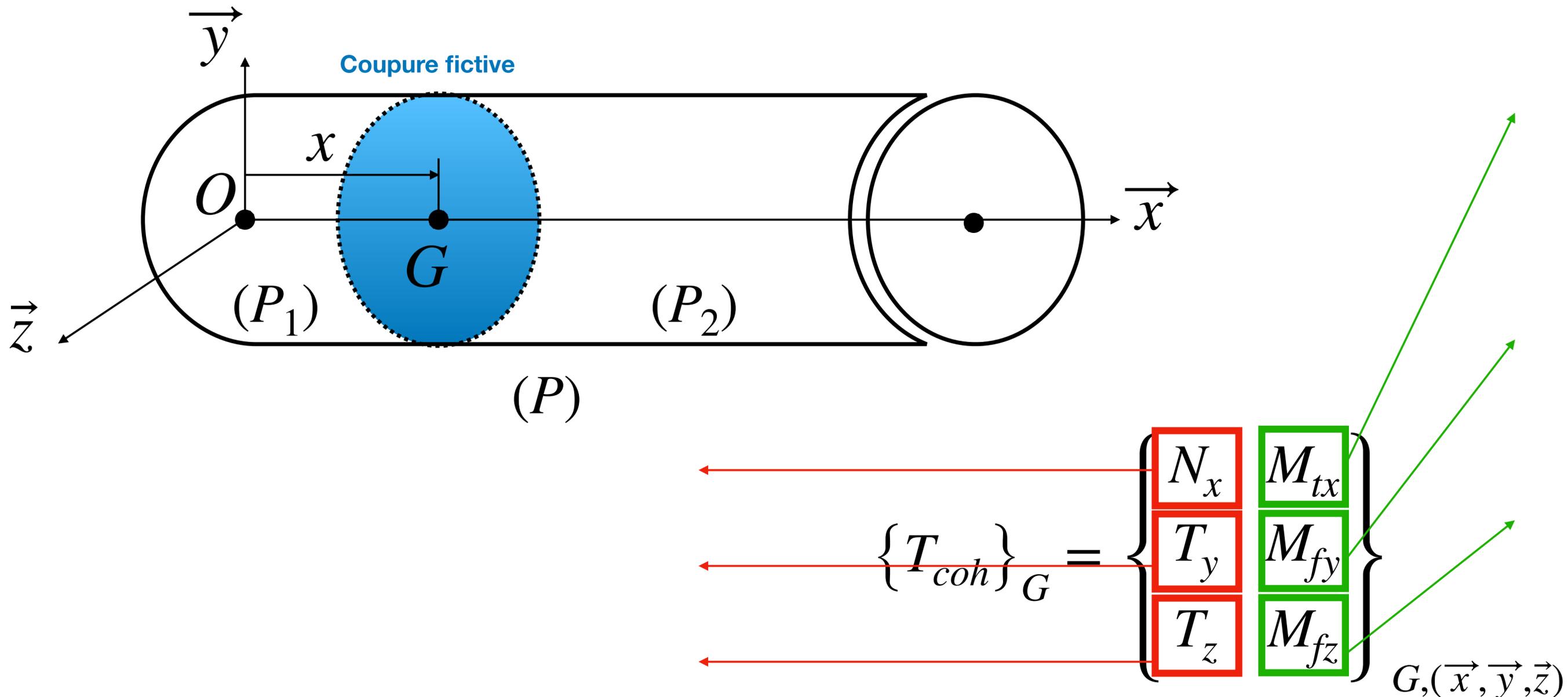


5. Le torseur de cohésion



6. Les sollicitations

L'analyse des composantes du torseur de cohésion $\{T_{coh}\}_G$ permet de déterminer le type de sollicitations que subit la poutre.



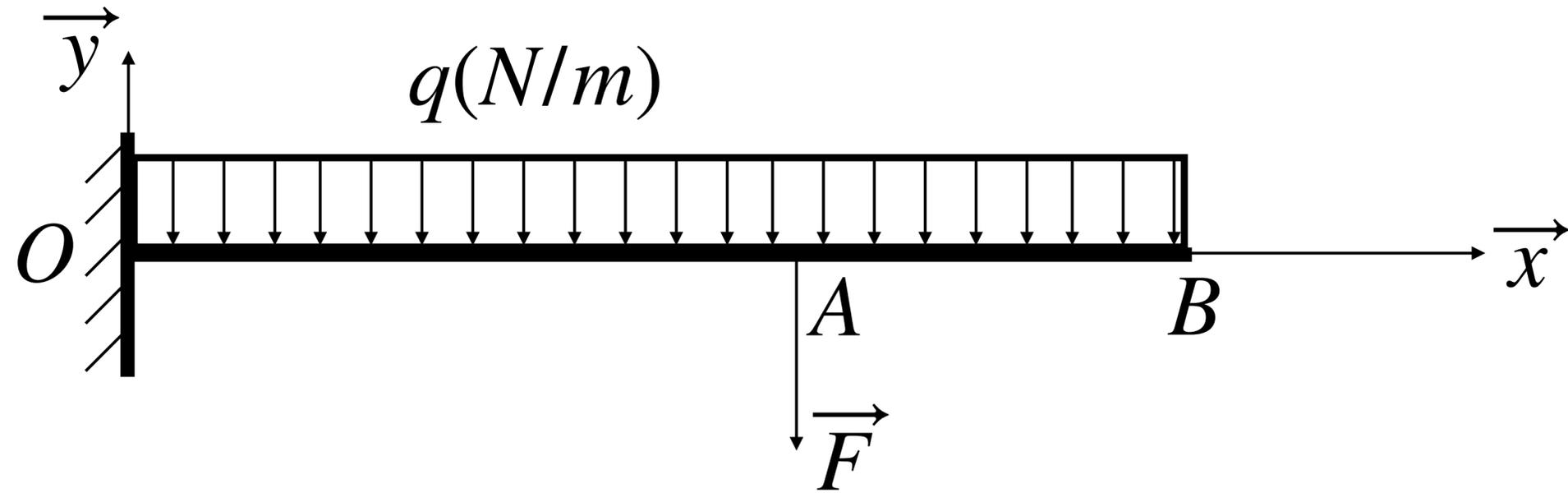
6. Les sollicitations

Ainsi, nous pouvons résumer dans ce tableau le lien entre le torseur de cohésion et les sollicitations subies :

<i>Torseur coh.</i>	<i>Sollicitation</i>
${}_G \begin{Bmatrix} \vec{N} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = {}_G \begin{Bmatrix} N_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$	traction-compression $N_x > 0$ $N_x < 0$
${}_G \begin{Bmatrix} \vec{T} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = {}_G \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$	cisaillement
${}_G \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M}_t \end{Bmatrix} = {}_G \begin{Bmatrix} 0 & M_{tx} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$	torsion simple
${}_G \begin{Bmatrix} \vec{T} \\ \vec{M}_f \end{Bmatrix} = {}_G \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$	flexion plane
${}_G \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M}_f \end{Bmatrix} = {}_G \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$	flexion pure

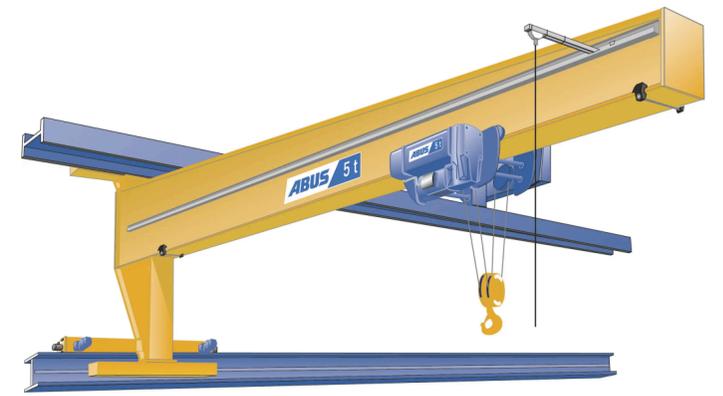
Source : Damien ANDRE (ENSIL)

6. Les sollicitations



$$OA = d$$

$$OB = L$$



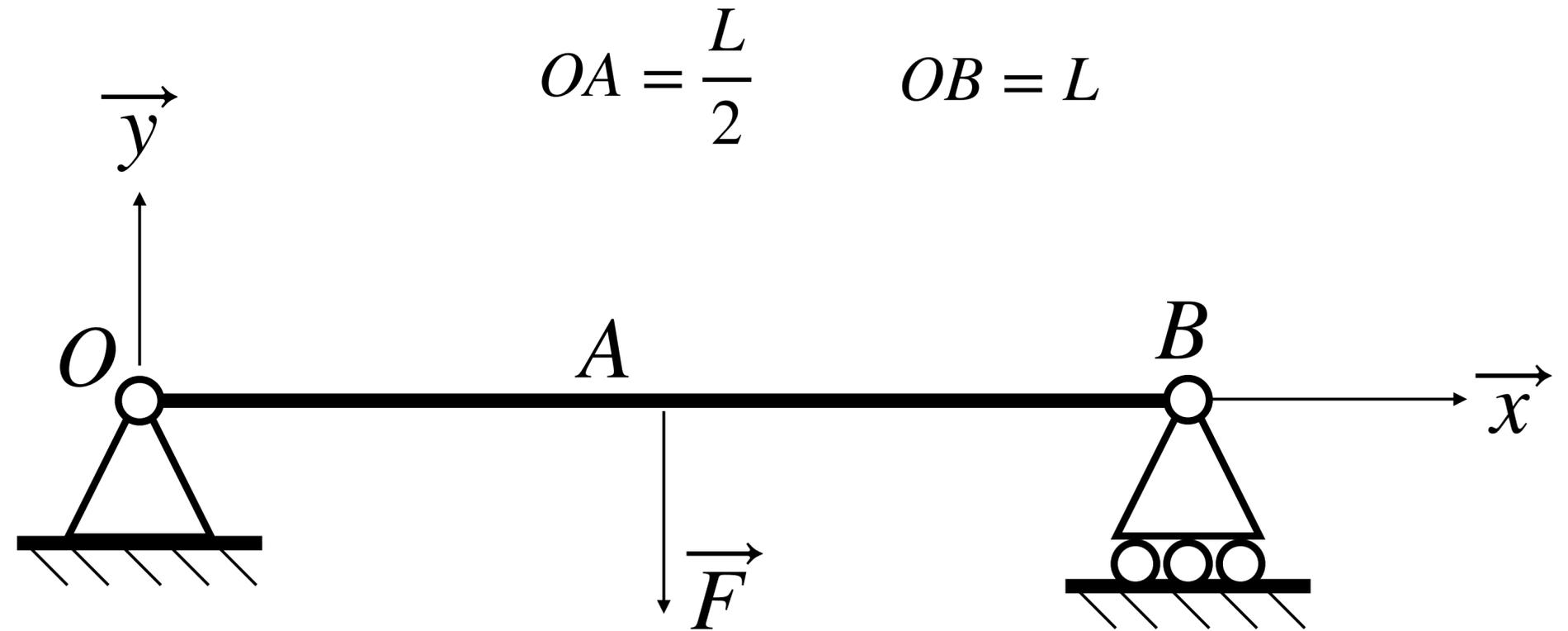
6. Les sollicitations



7. Exercice de cours



Réel

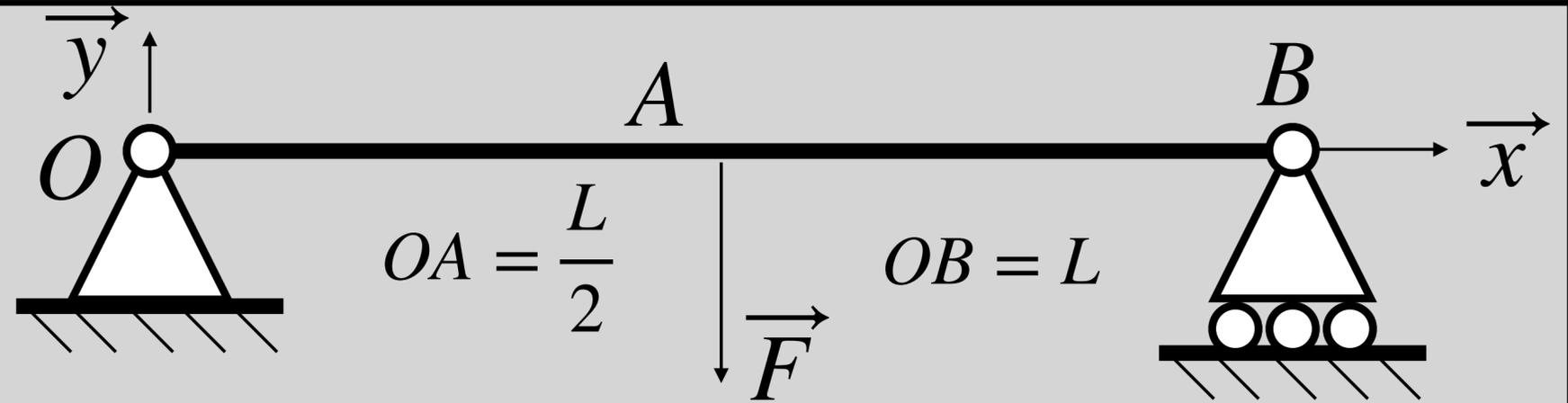


Modèle poutre

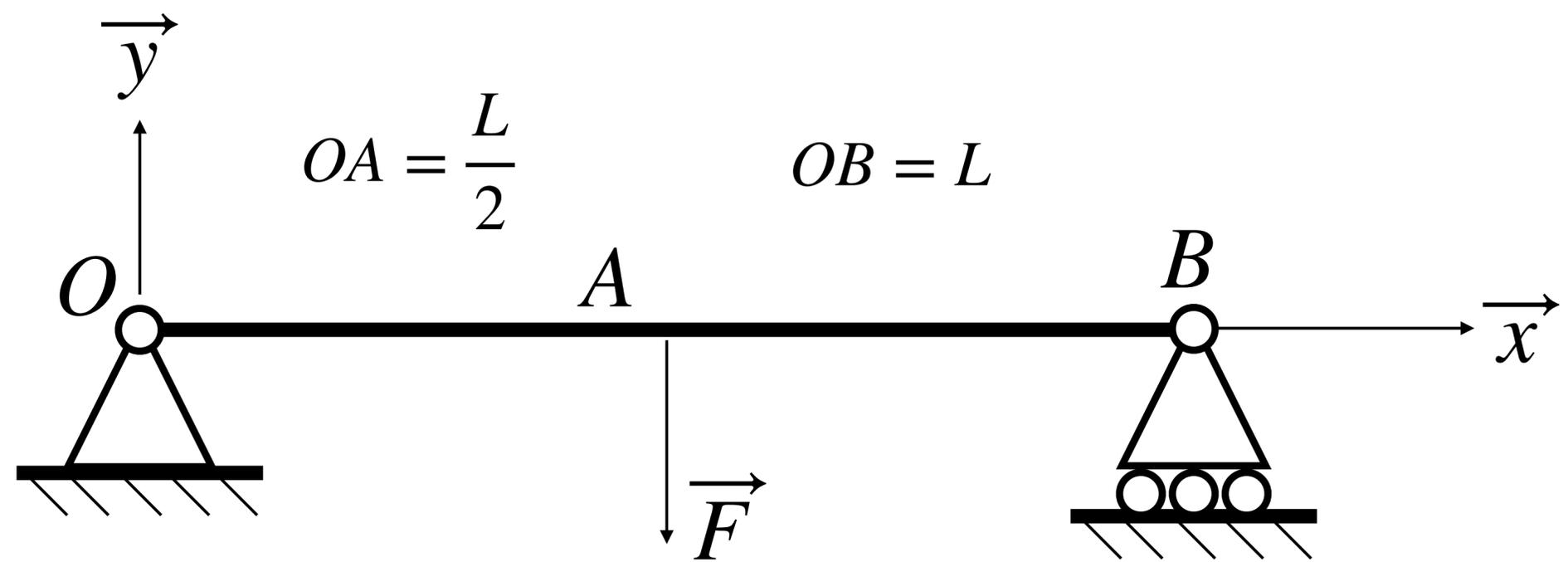
1. Déterminer les actions mécaniques aux appuis en O et B en fonction de F et L .
2. Déterminer le torseur de cohésion sur le tronçon $[OA]$. En déduire les sollicitations subies.
3. Déterminer le torseur de cohésion sur le tronçon $[AB]$. En déduire les sollicitations subies.
4. Tracer le diagramme de l'effort tranchant T_y sur toute la poutre.
5. Tracer le diagramme du moment fléchissant M_{fz} sur toute la poutre.

7. Exercice de cours

1. Déterminer les actions mécaniques aux appuis en O et B en fonction de F et L .

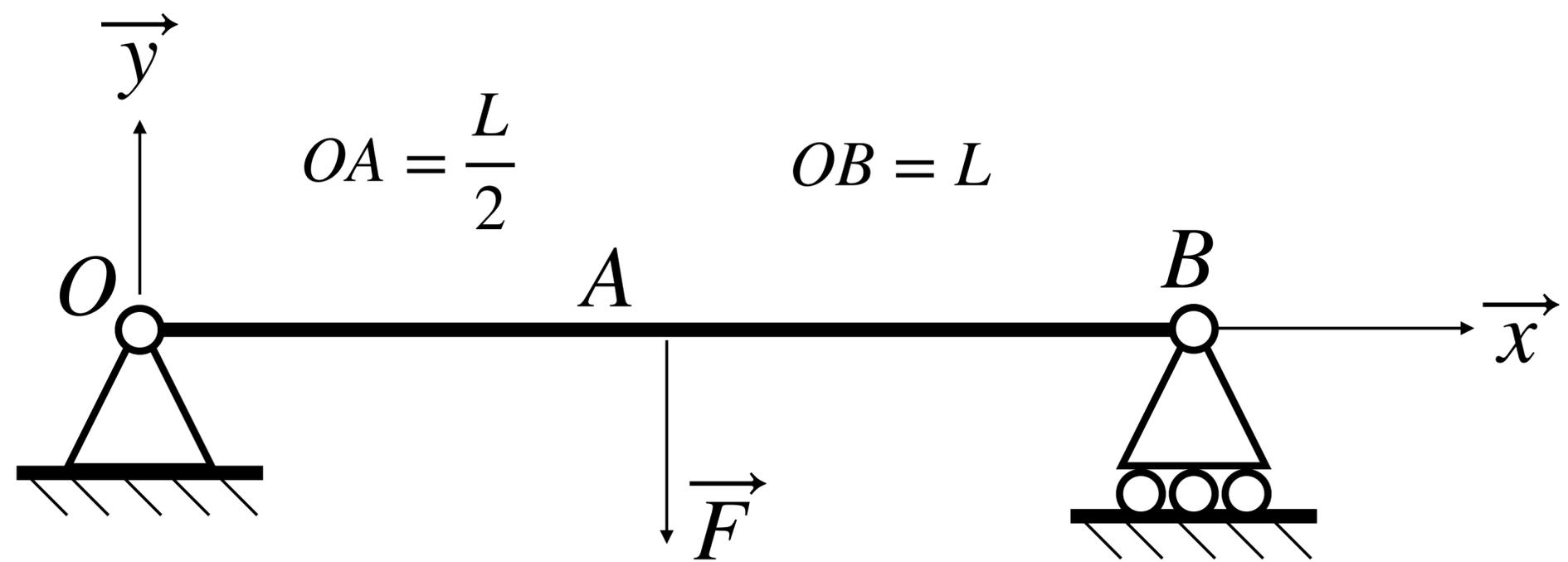


7. Exercice de cours



2. Déterminer le torseur de cohésion sur le tronçon $[OA]$. En déduire les sollicitations subies.

7. Exercice de cours



2. Déterminer le torseur de cohésion sur le tronçon $[AB]$. En déduire les sollicitations subies.

7. Exercice de cours

