

Résistance des matériaux

Chapitre 2 : contraintes et déformations

F. BLASCHECK

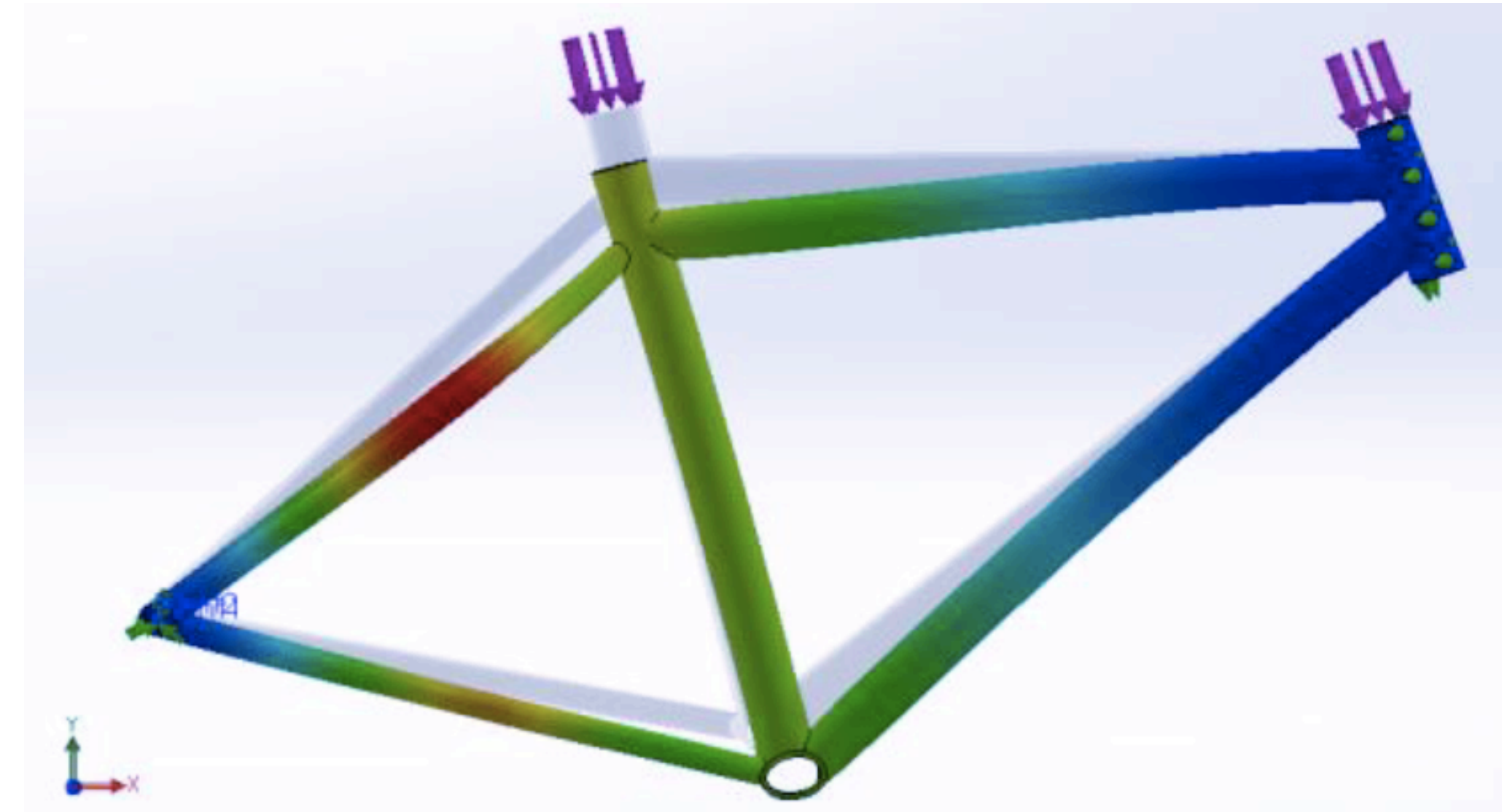
Chapitre 2 : contraintes et déformation

1. Objectifs
2. Les contraintes dans une section de poutre
3. Traction / compression
4. Cisaillement
5. Torsion
6. Flexion plane simple : équation de la déformée
7. Tableau de synthèse
8. Moments polaire et quadratique de sections simples
9. Exercice de cours

1. Objectifs

L'objectif de la **résistance des matériaux** (RDM) est l'étude de la résistance d'une structure sous l'effet d'un chargement :

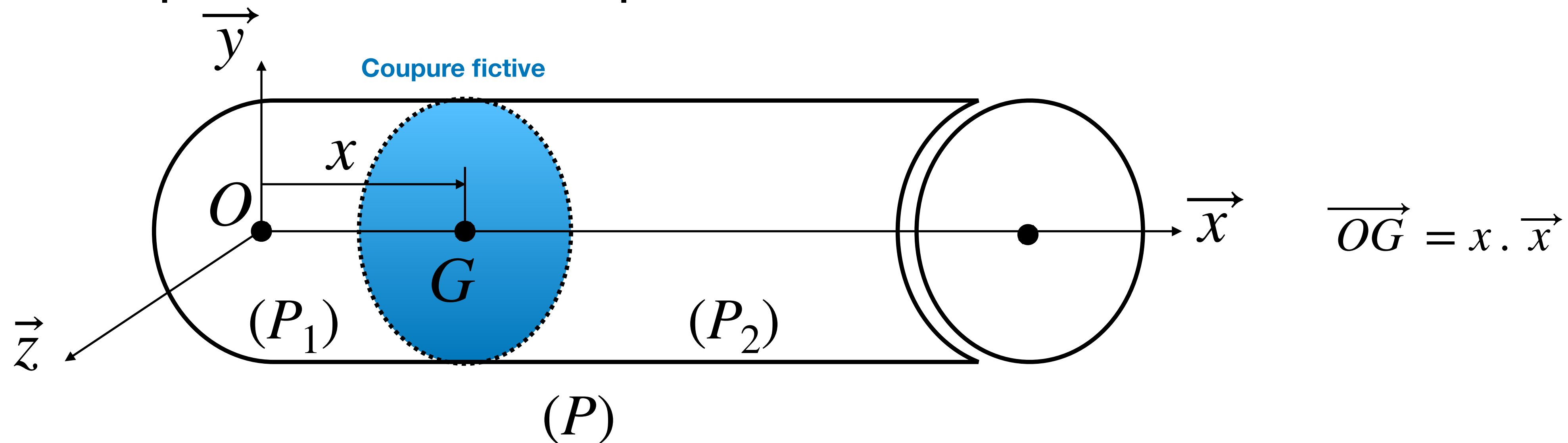
- calculer **les contraintes** internes ;
- déterminer **les déformations** ;
- vérifier ou optimiser **la tenue mécanique**.



Déformée d'un cadre de vélo (sous SOLIDWORKS)

2. Les contraintes dans une section de poutre

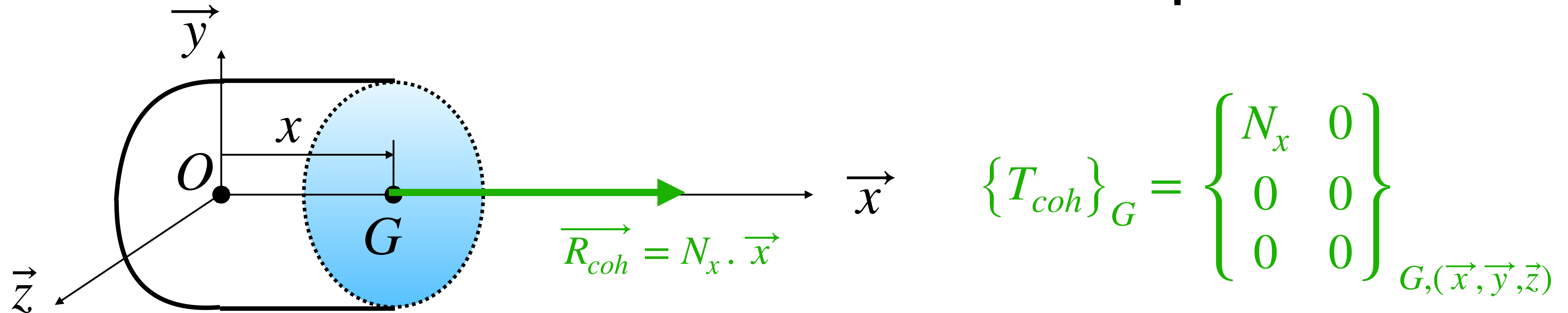
Soit une poutre et une coupure fictive en G :



Les efforts de cohésion de la matière dans cette section sont donnés par le torseur de cohésion en G :

$$\{T_{coh}\}_G = \{T_{P_2 \rightarrow P_1}\}_G = \begin{Bmatrix} N_x & M_{tx} \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}_{G, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

2. Les contraintes dans une section de poutre



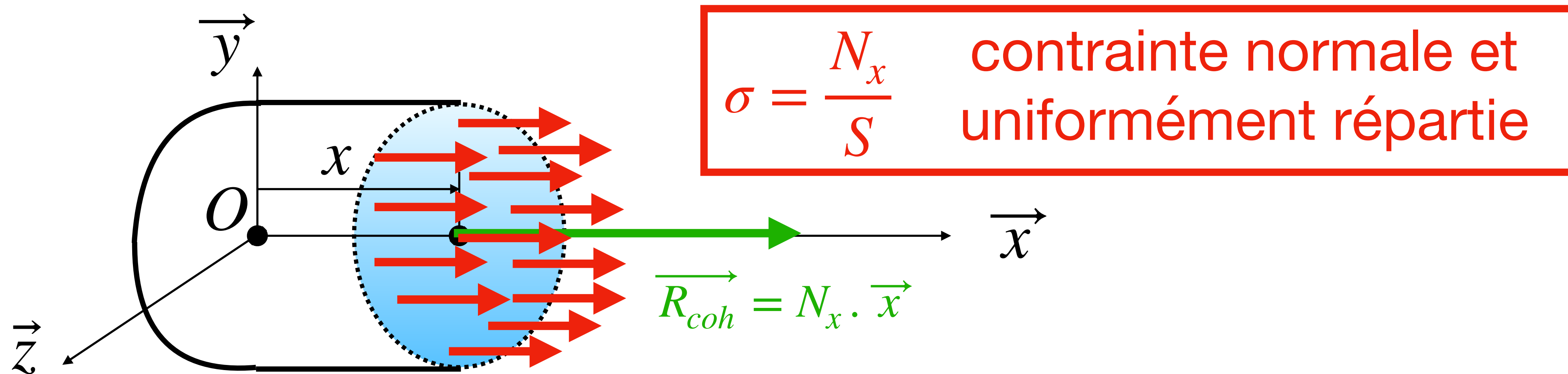
Ne considérons qu'un effort normal N_x .

En supposant cette force uniformément répartie sur toute la section, la pression sur toute la surface S vaut :

$$p = \frac{N_x}{S}$$

Cette « pression » est appelée contrainte normale et est notée σ

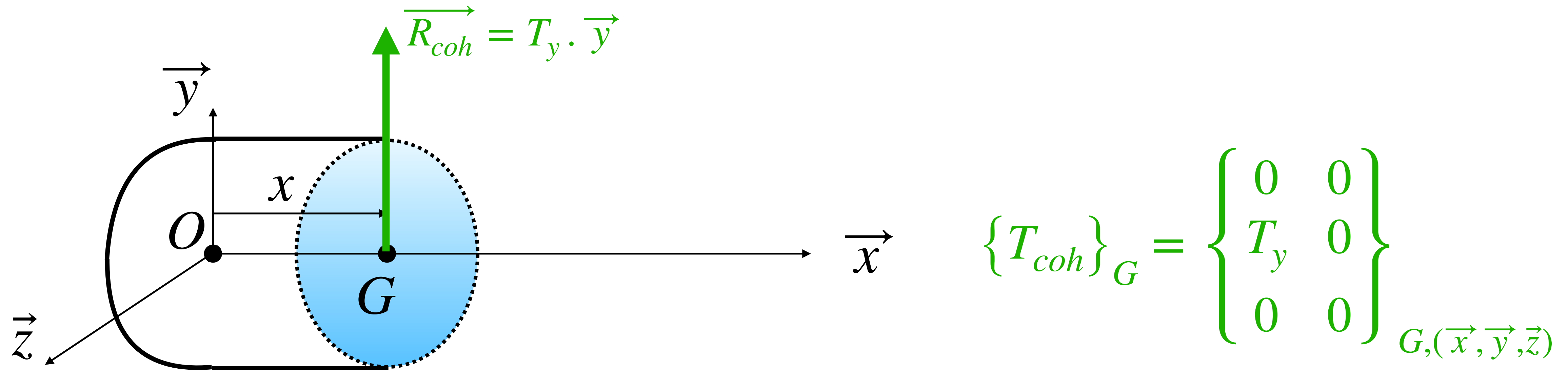
2. Les contraintes dans une section de poutre



La contrainte normale caractérise **la pression exercée sur la section droite de la poutre**, elle est toujours perpendiculaire à la section.

Attention l'expression ci-dessus n'est valable **que dans le cas d'une sollicitation de traction-compression**.

2. Les contraintes dans une section de poutre



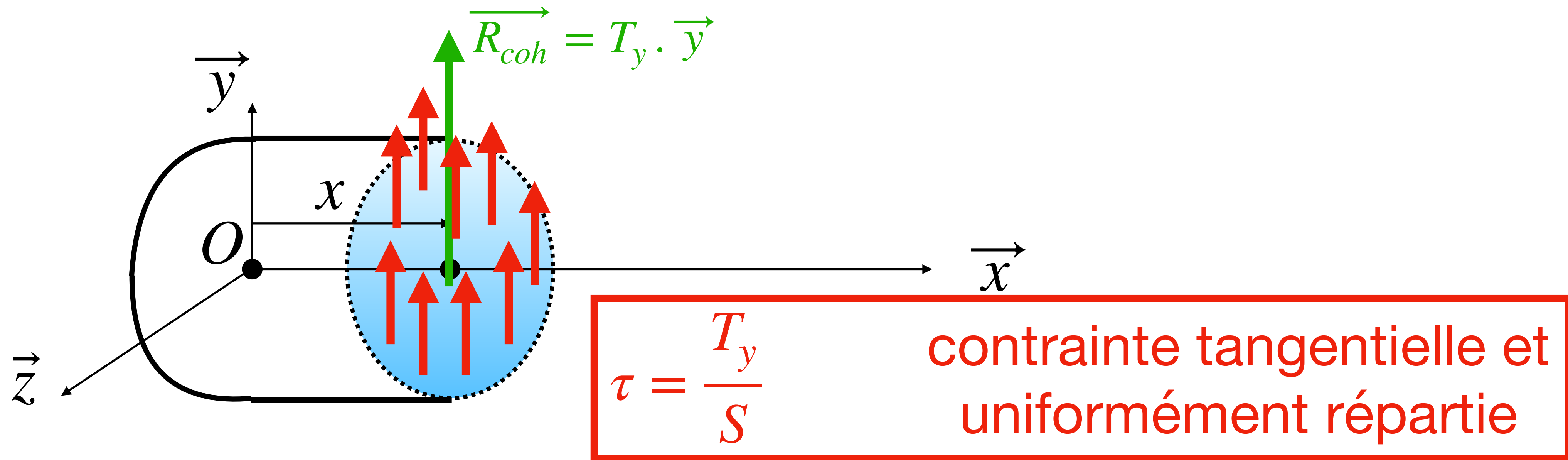
Ne considérons qu'un effort tranchant T_y .

En supposant cette force uniformément répartie sur toute la section, la pression sur toute la surface S vaut :

$$p = \frac{T_y}{S}$$

Cette « pression » est appelée contrainte tangentielle et est notée τ

2. Les contraintes dans une section de poutre



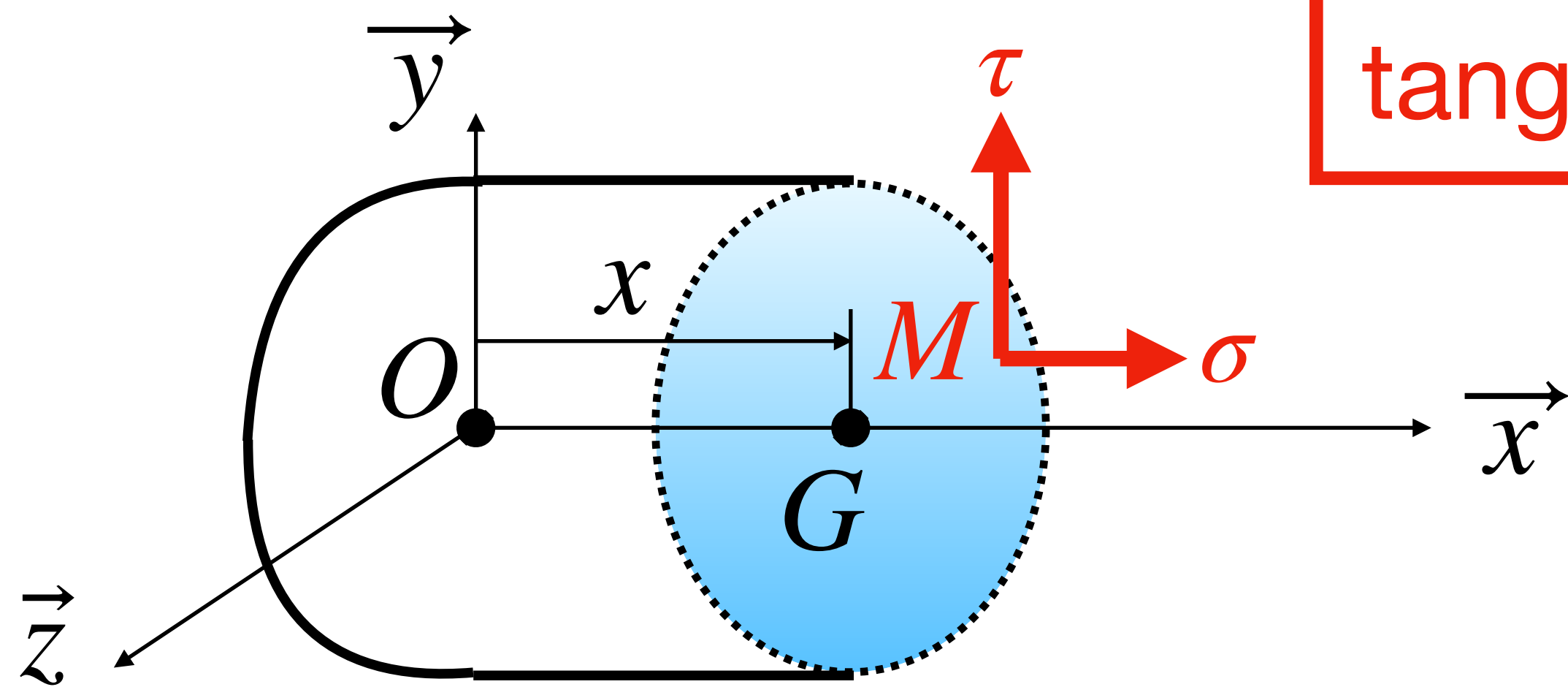
La contrainte tangentielle caractérise **la pression exercée sur la section droite de la poutre**, elle est toujours parallèle à la section.

Attention l'expression ci-dessus n'est valable **que dans le cas d'une sollicitation de cisaillement**.

2. Les contraintes dans une section de poutre

Conclusion :

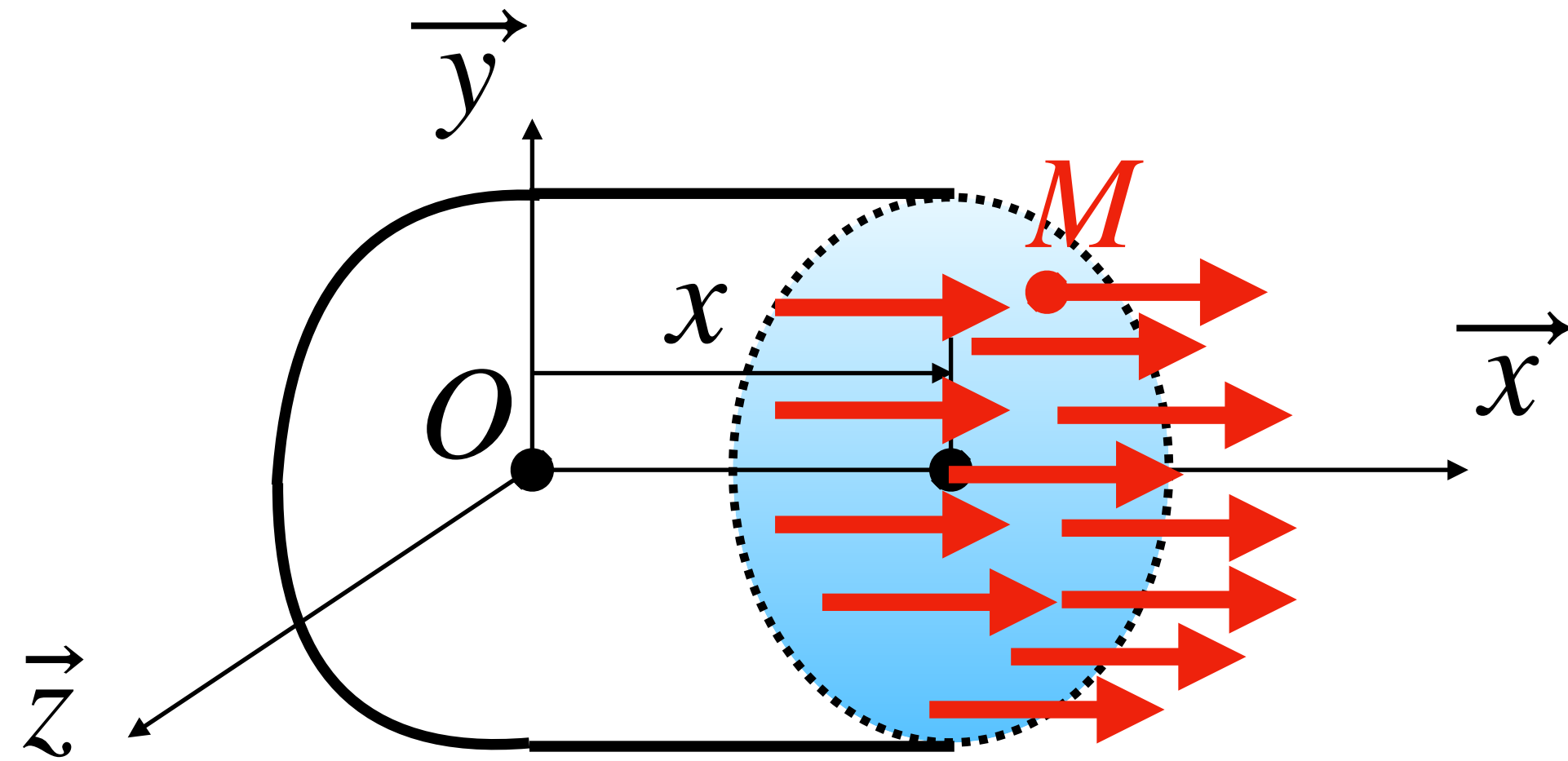
Pour un chargement quelconque, en tout M de la section droite de la poutre, il existe une contrainte normale σ et une contrainte tangentielle τ .



Pour résoudre le problème de RDM, il nous faut **la contrainte et la déformation.**

3. Traction ou compression

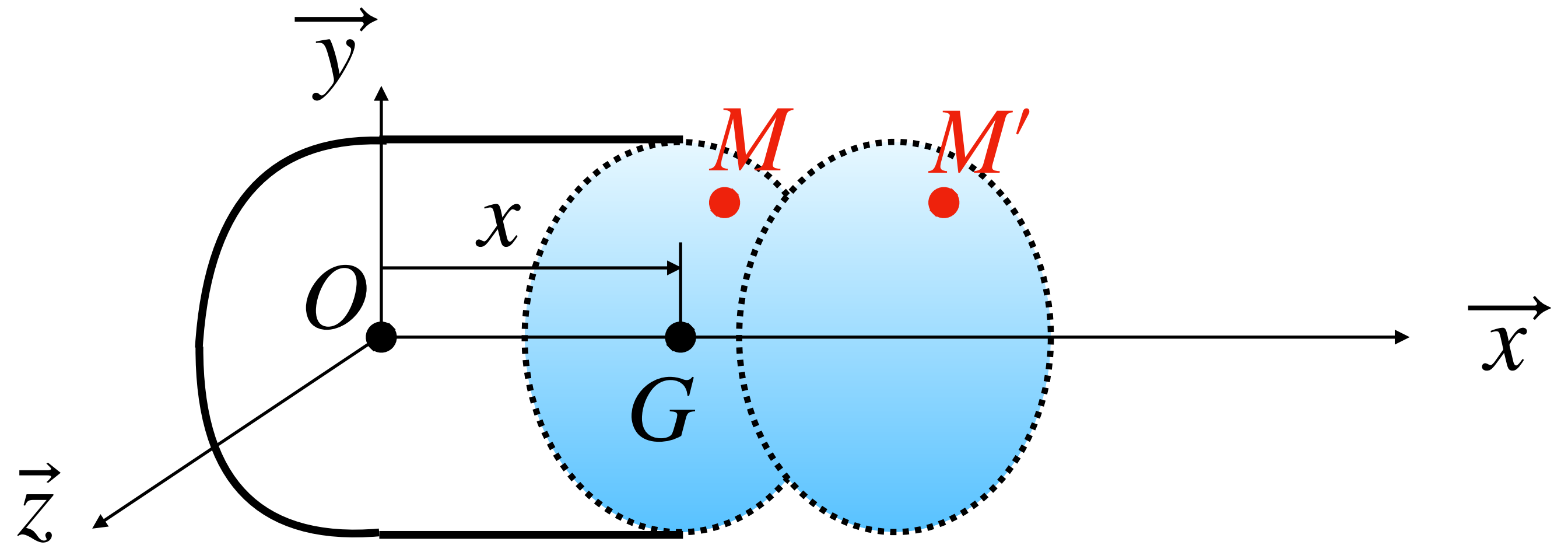
Contrainte



$$\sigma(M) = \frac{N_x}{S}$$

contrainte normale et uniformément répartie

Déformation

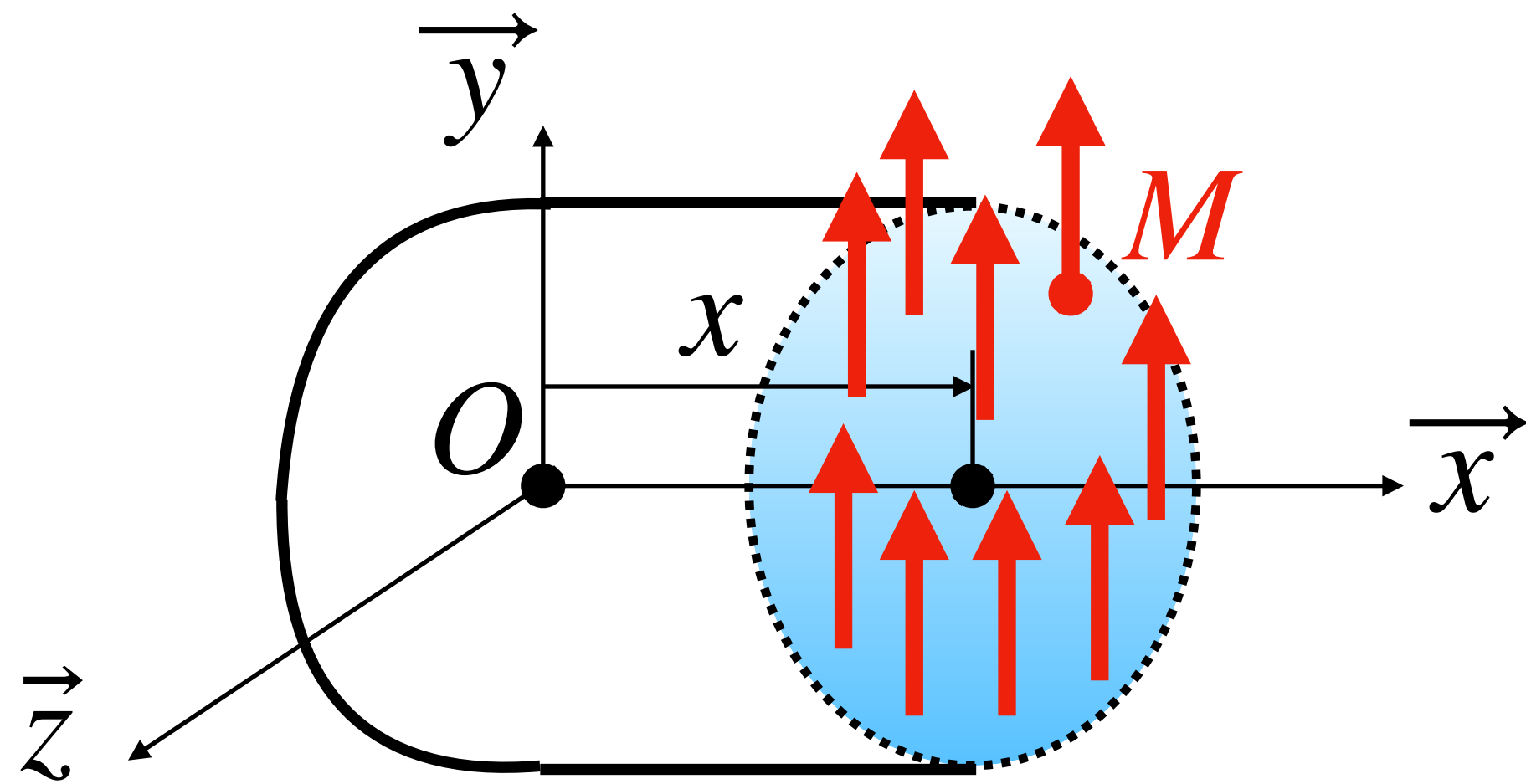


$$\epsilon(M) = \frac{MM'}{OM} = \frac{\Delta x}{x} = \frac{\sigma}{E} = \frac{N_x}{SE}$$

allongement uniforme

4. Cisaillement

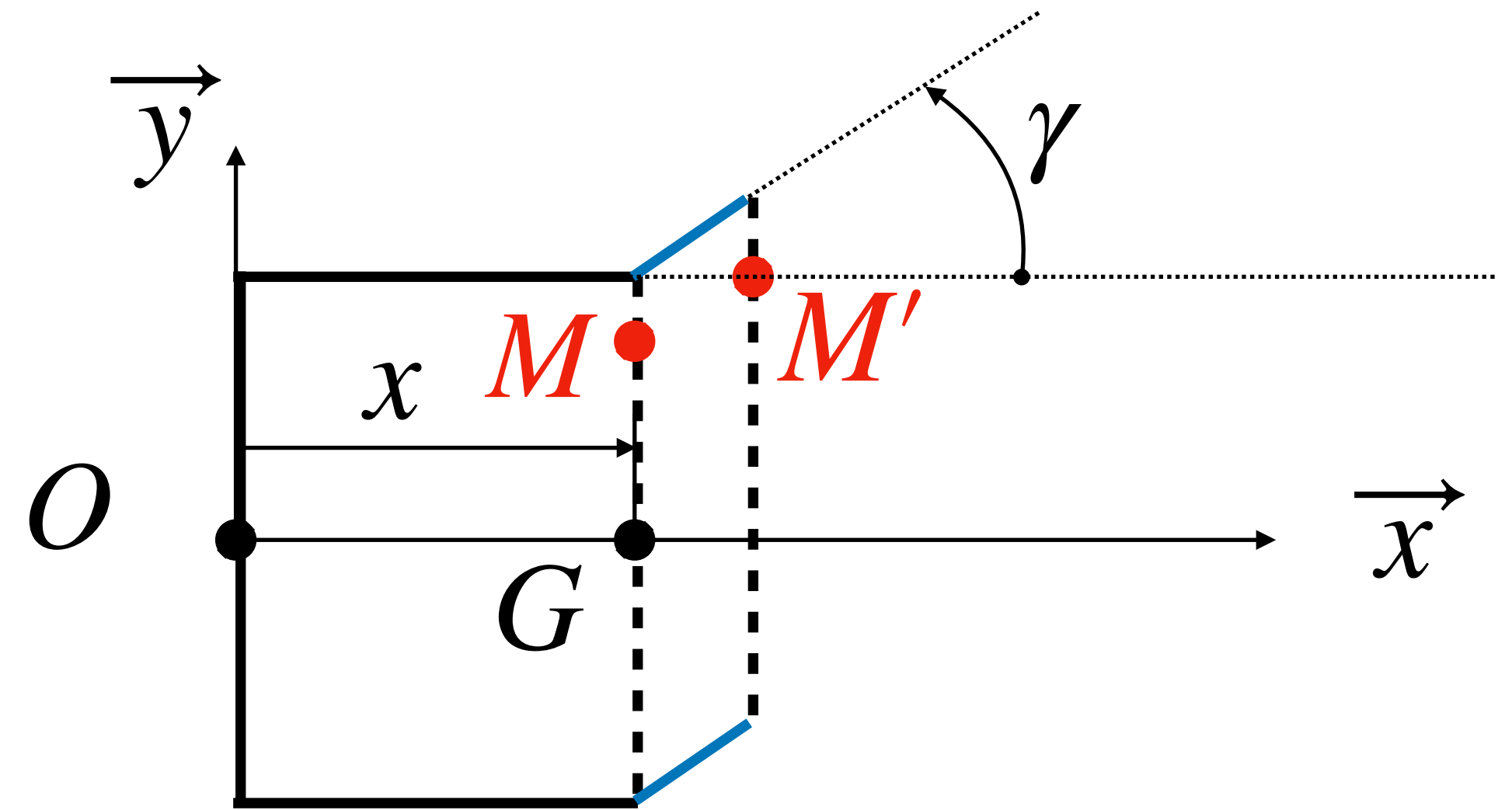
Contrainte



$$\tau(M) = \frac{T_y}{S}$$

contrainte tangentielle et
uniformément répartie

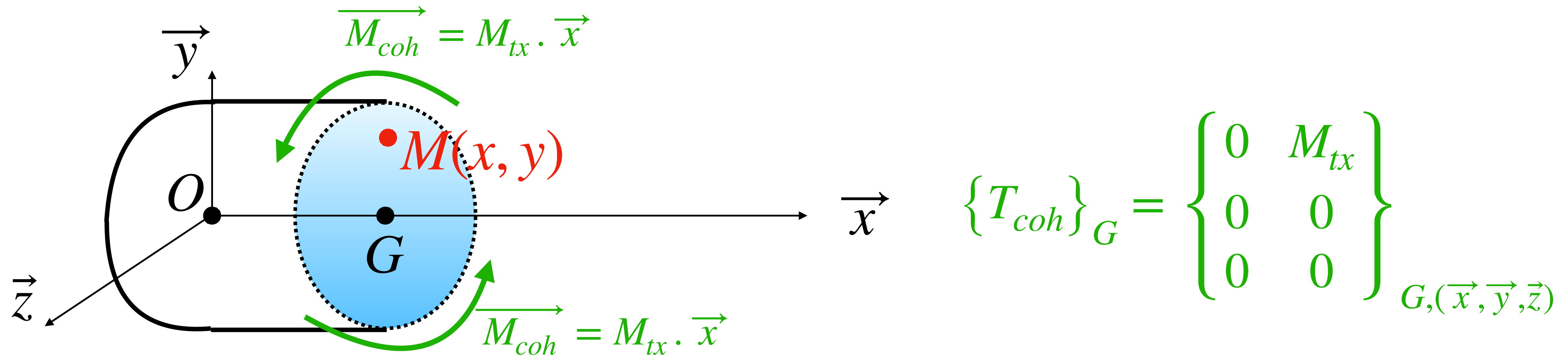
Déformation



$$\gamma(M) = \frac{\tau}{G} \approx \frac{\tau}{0,4.E} = \frac{T_y}{0,4.SE}$$

déformation angulaire
(rad) uniforme

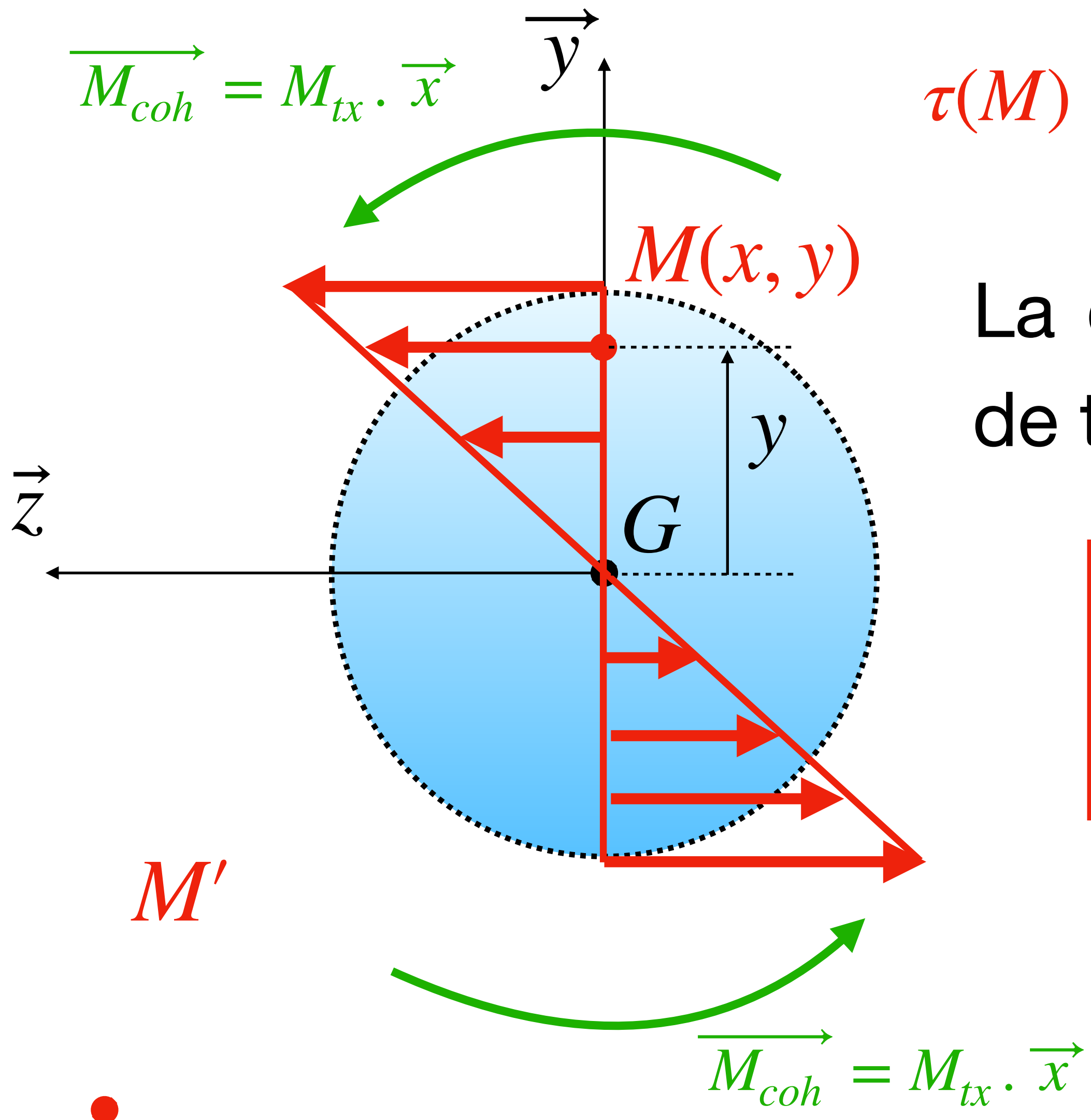
5. Torsion



Ne considérons qu'un moment de torsion M_{tx} .

Ce moment ne créera pas de contrainte normale, uniquement une contrainte tangentielle τ . Mais sera-t-elle uniforme ?

5. Torsion



$\tau(M) = K \cdot y$ contrainte tangentielle et proportionnelle à la distance y à G

La constante K dépend bien sur du moment de torsion M_{tx} .

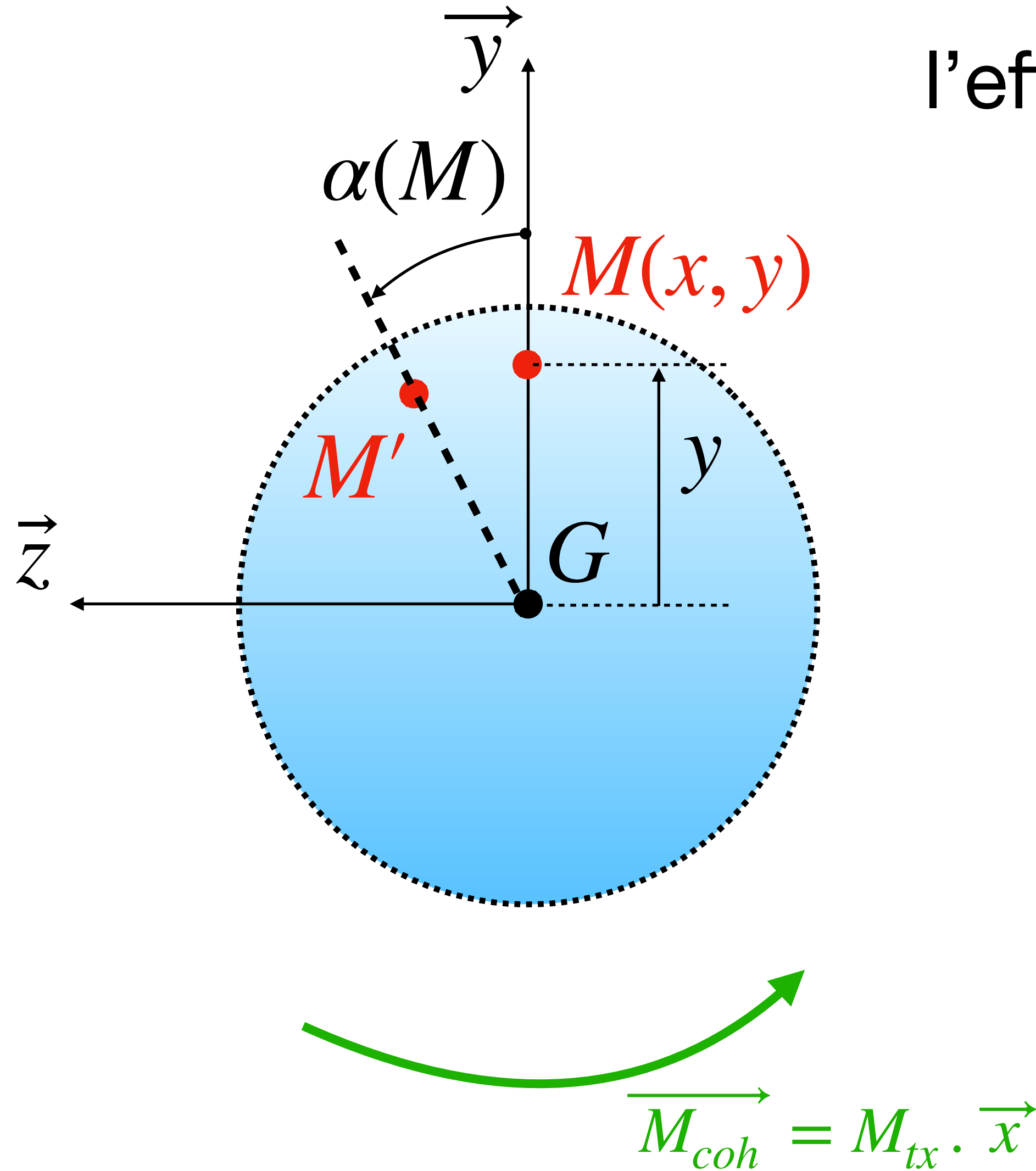
$$\tau(M) = \frac{M_{tx}}{I_0} \cdot y$$

I_0 moment polaire de la section (mm^4)

contrainte tangentielle et proportionnelle à la distance y à G

5. Torsion

Le point M va tourner d'un angle α sous l'effet du moment de torsion M_{tx} .

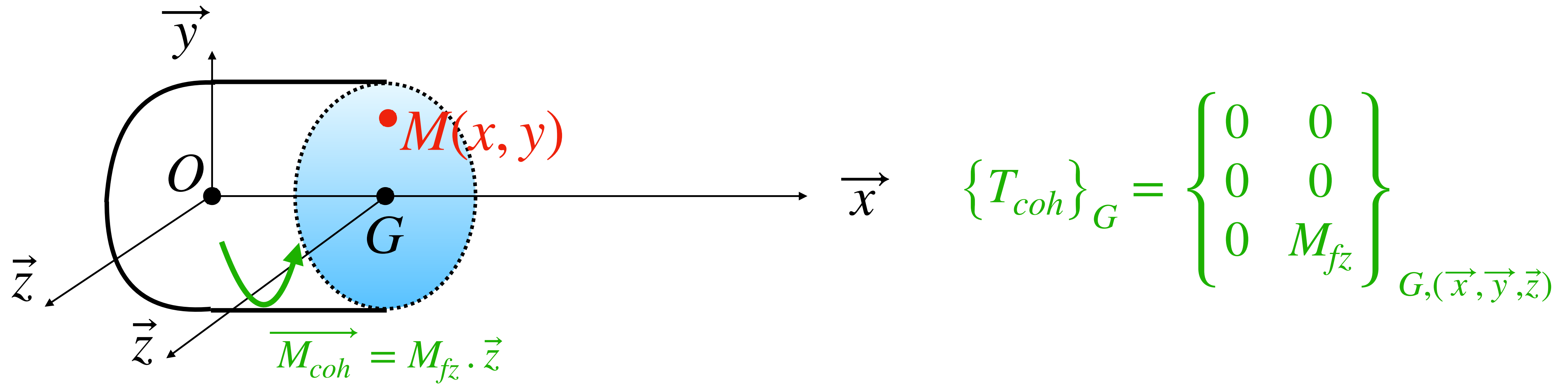


$$\alpha(M) = \frac{\tau(M) \cdot x}{G \cdot y} = \frac{M_{tx} \cdot x}{G \cdot I_0} \approx \frac{M_{tx} \cdot x}{0,4 \cdot E \cdot I_0}$$

I_0 moment polaire de la section (mm^4)

déformation angulaire (rad)
proportionnelle à la position sur la poutre

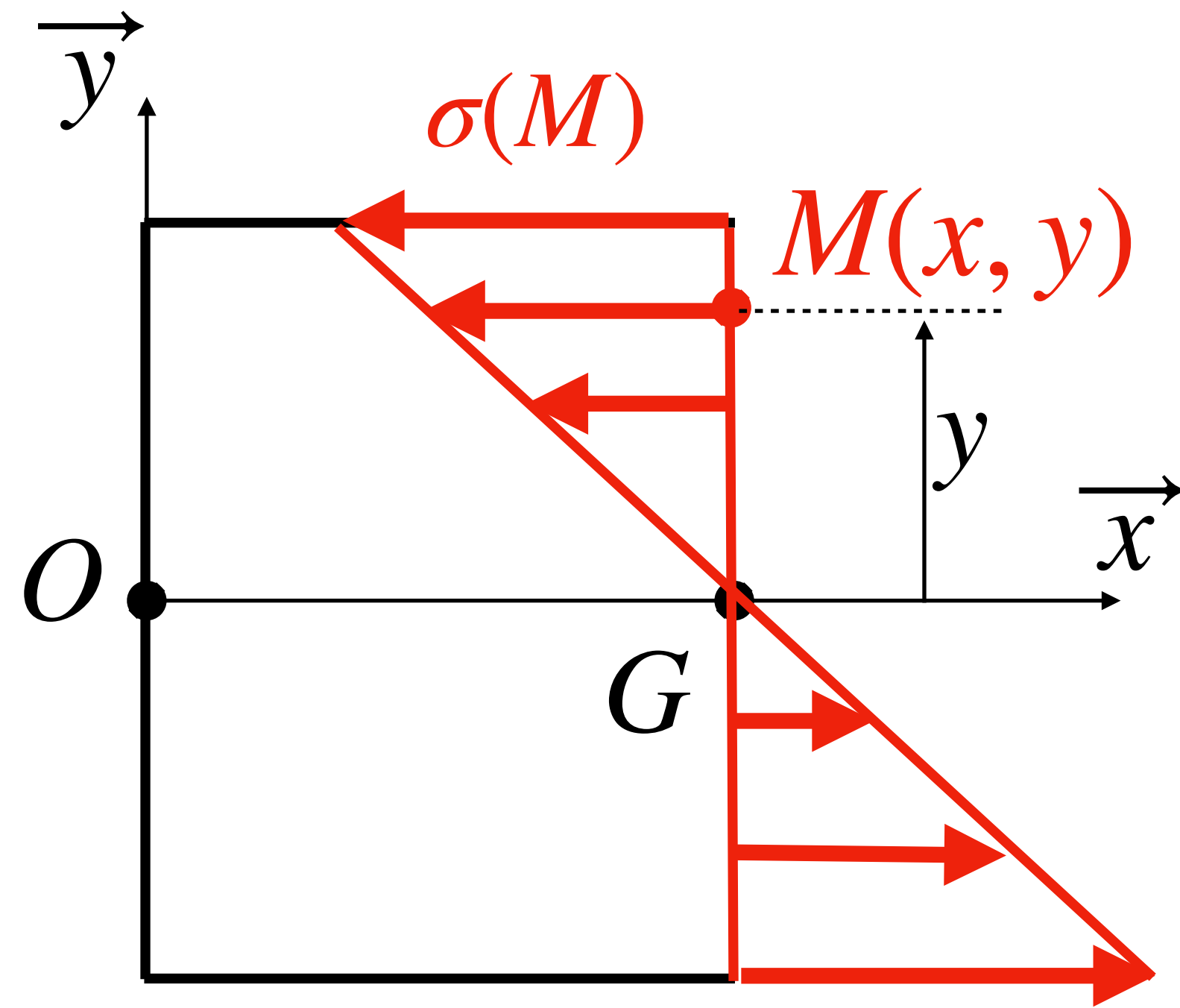
6. Flexion plane simple : équation de la déformée



Ne considérons qu'un moment de torsion M_{fz} .

Ce moment ne créera pas de contrainte tangentielle, uniquement une contrainte normale σ . Mais sera-t-elle uniforme ?

6. Flexion plane simple : équation de la déformée



contrainte normale et

$\sigma(M) = K \cdot y$ proportionnelle à la distance y à G

La constante K dépend bien sur du moment de flexion M_{fz} .

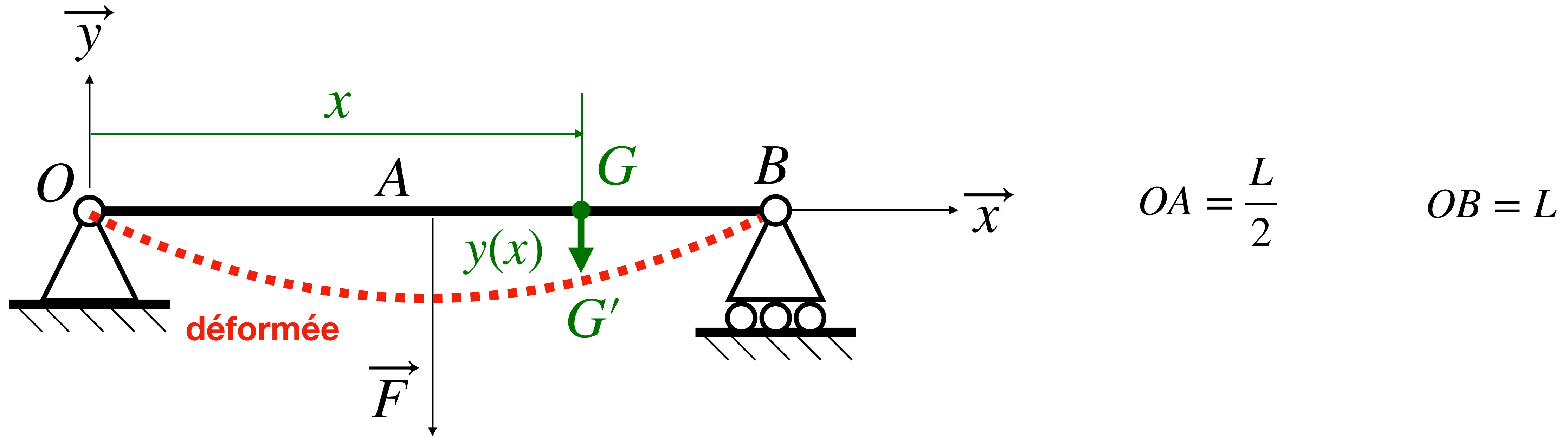
$$\sigma(M) = \frac{M_{fz}}{I_{Gz}} \cdot y$$

I_{Gz} moment quadratique de la section (mm^4)

contrainte normale et

proportionnelle à la distance y à G

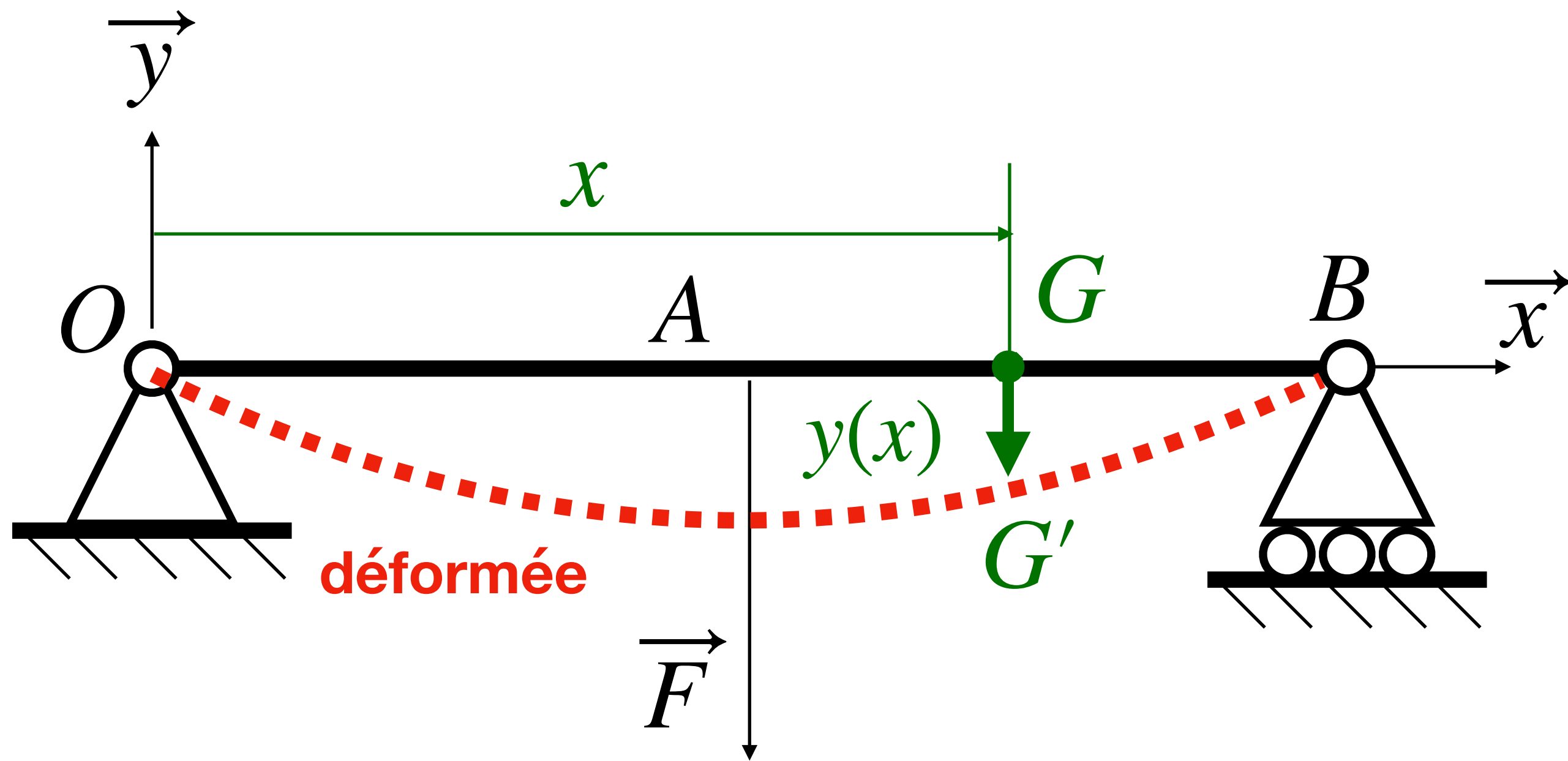
6. Flexion plane simple : équation de la déformée



Le déplacement GG' (mm) du centre de la section droite G est appelée la flèche et est noté $y(x)$.

L'équation $y(x)$ est l'équation de la **déformée**, son tracé en fonction de x définit **le tracé de la déformée de la poutre.**

6. Flexion plane simple : équation de la déformée



L'équation de la déformée $y(x)$ est obtenue par **intégration de l'équation différentielle** suivante le long de la poutre.

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x) = y''(x) = \frac{Mfz}{E \cdot I_{Gz}}$$

L'intégration se fait **sur chaque tronçon** et les conditions aux limites sont définies aux appuis :

$$y(x = 0) = 0$$

$$y(x = L) = 0$$

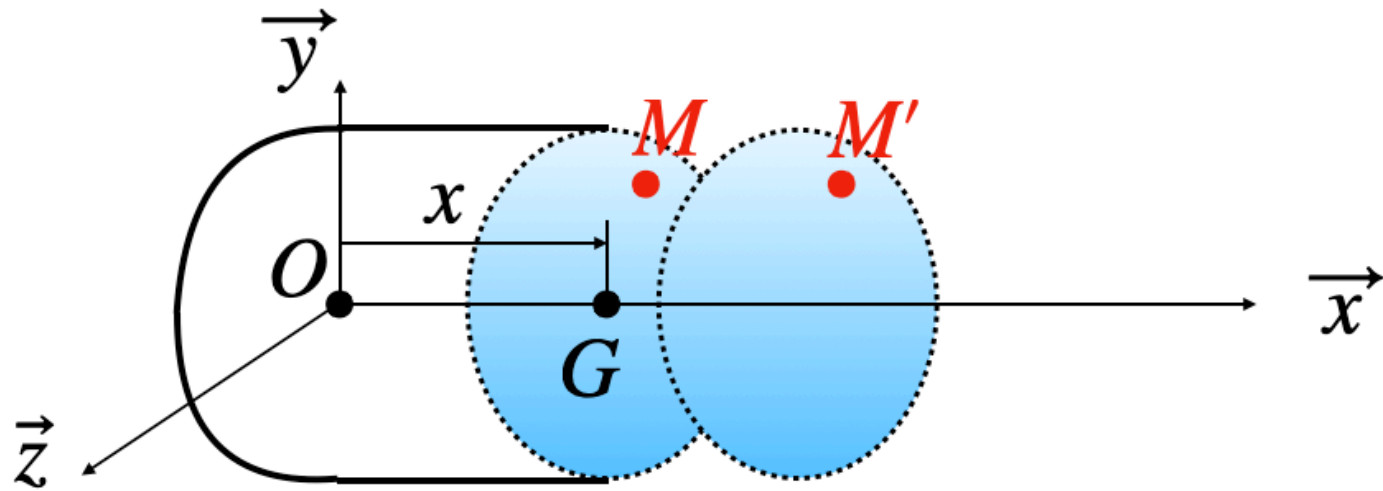
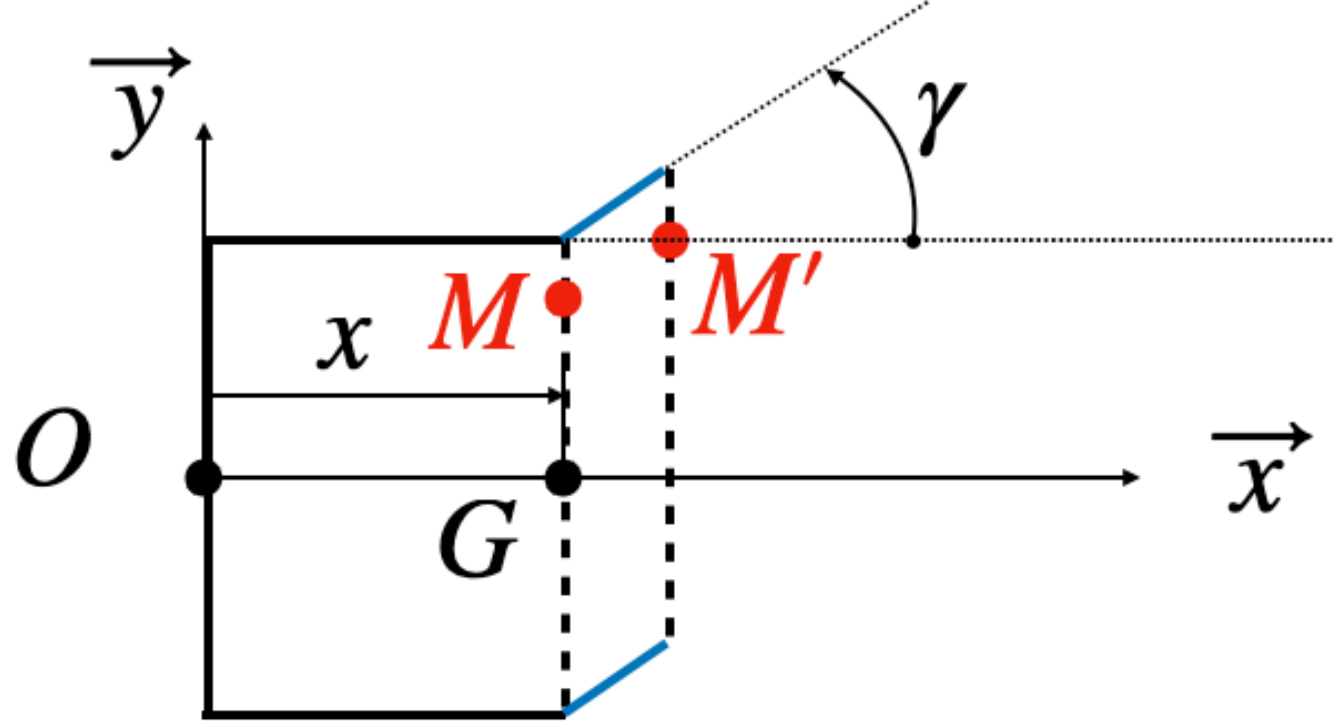
$$y(x = \frac{L}{2})_{[OA]} = y(x = \frac{L}{2})_{[AB]}$$

$$y'(x = \frac{L}{2})_{[OA]} = y'(x = \frac{L}{2})_{[AB]}$$

7. Tableau de synthèse

Contrainte

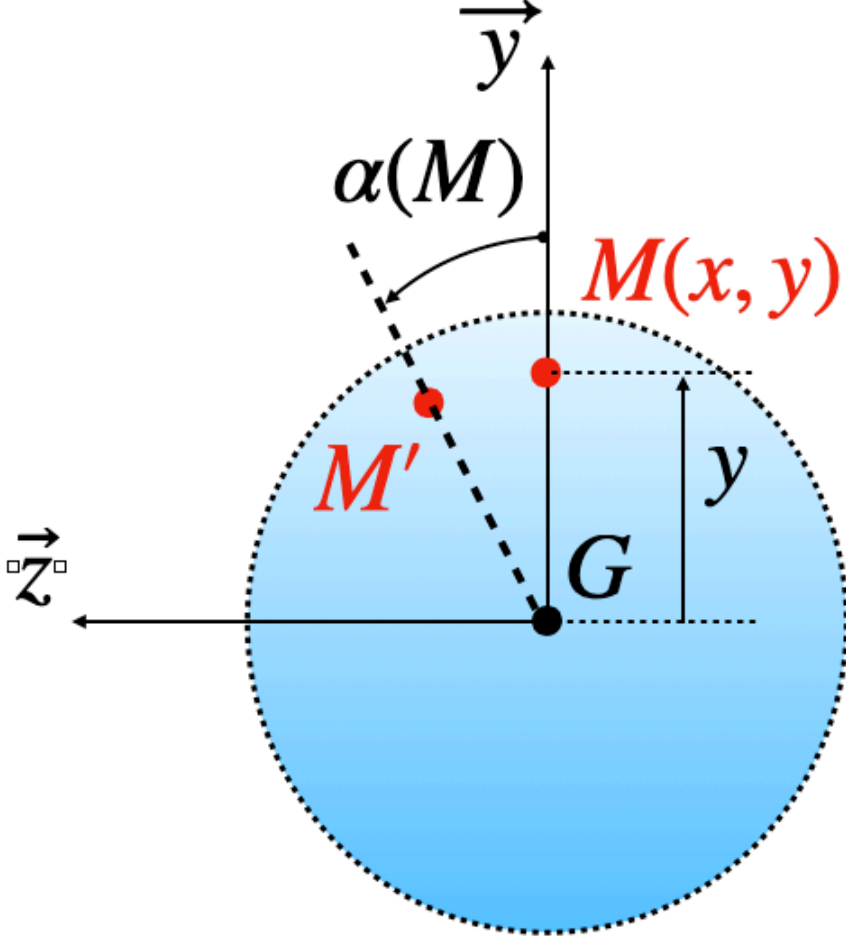
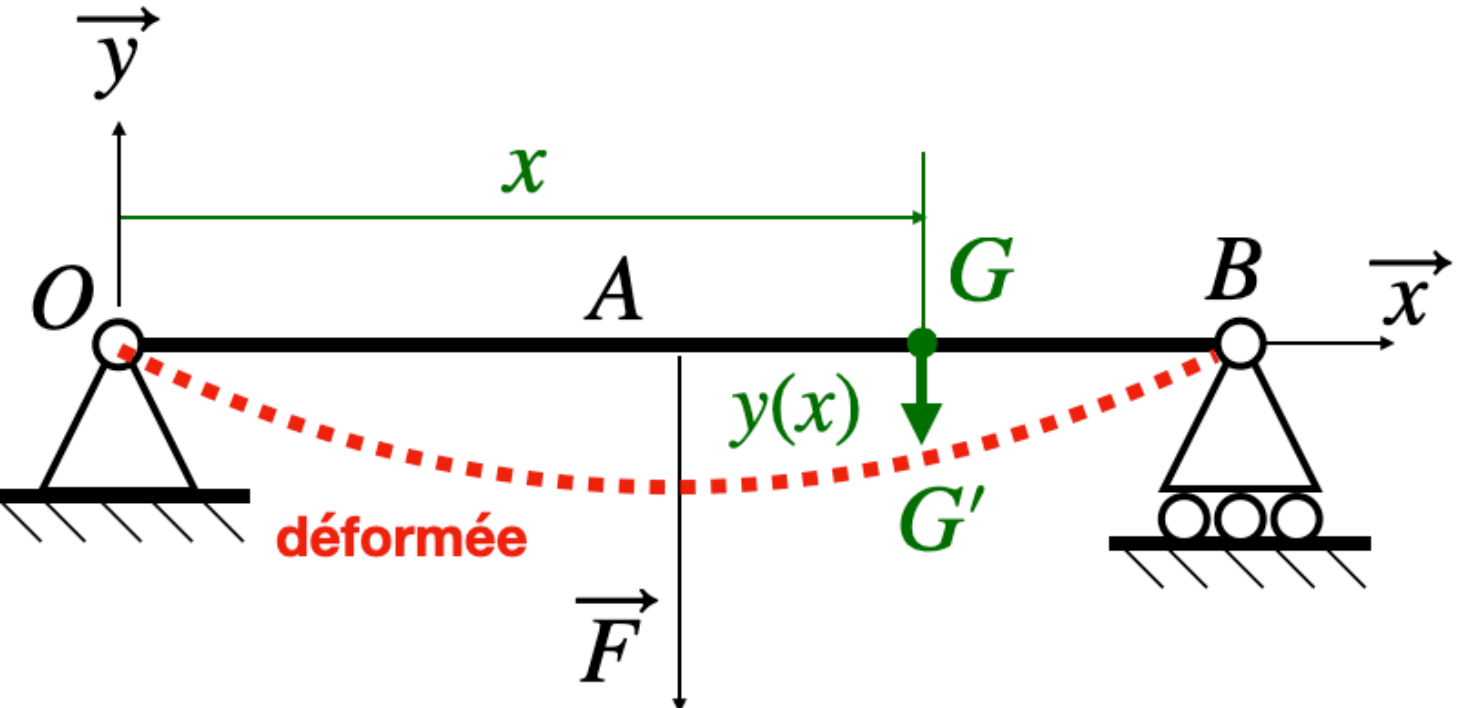
Déformation

<p>Traction ou compression</p>	$\begin{Bmatrix} N_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$		$\sigma(M) = \frac{N_x}{S}$	$\epsilon(M) = \frac{MM'}{x} = \frac{N_x}{SE}$
<p>Cisaillement</p>	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$		$\tau(M) = \frac{T_y}{S}$	$\gamma(M) = \frac{T_y}{SG} \approx \frac{T_y}{S \cdot 0,4E}$

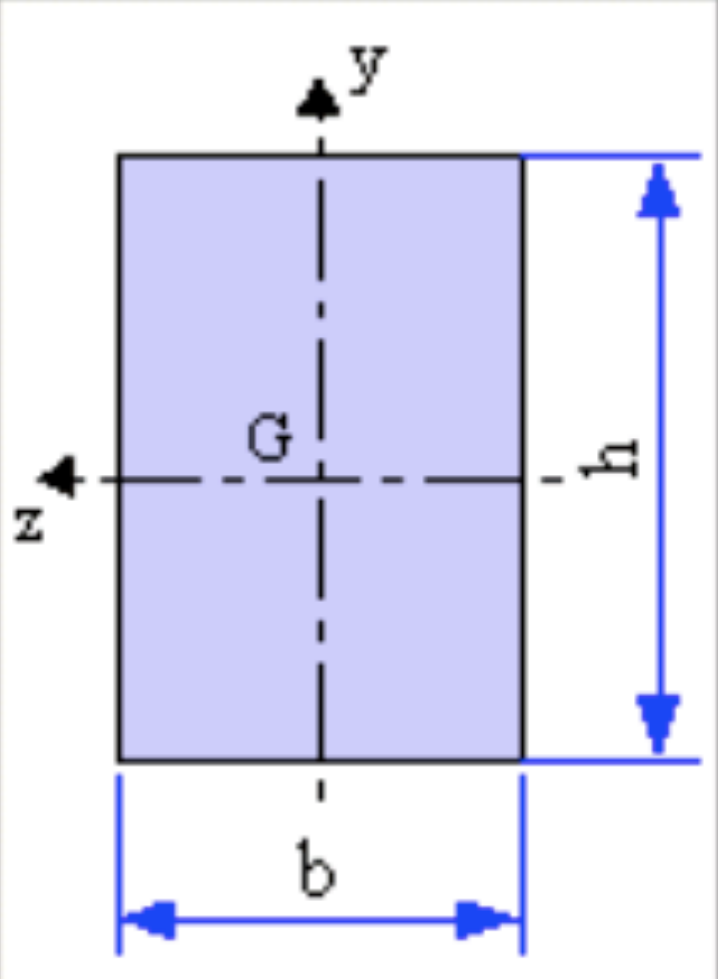
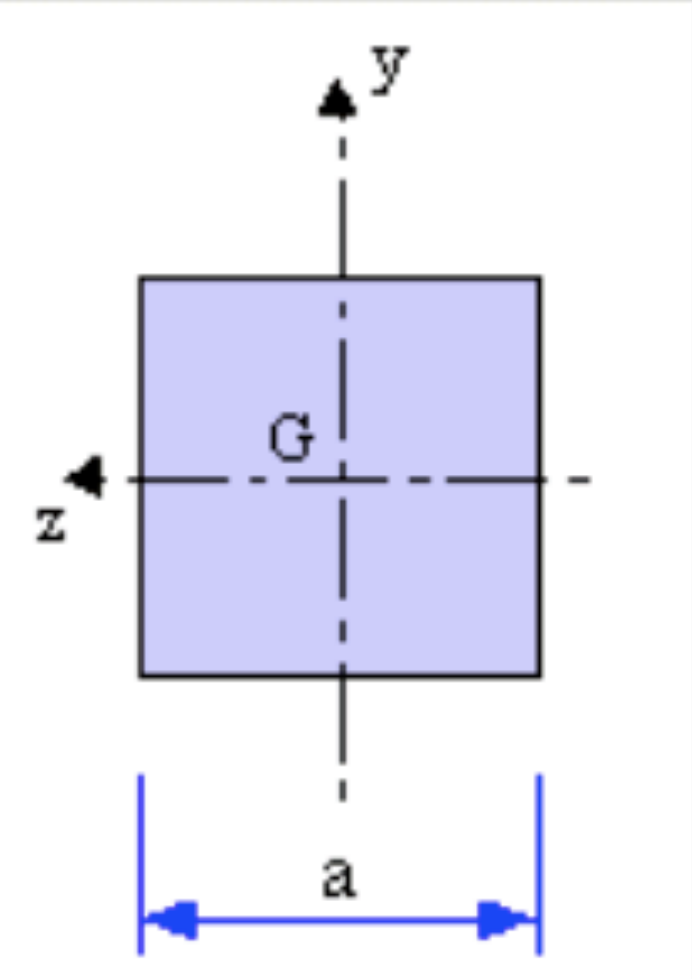
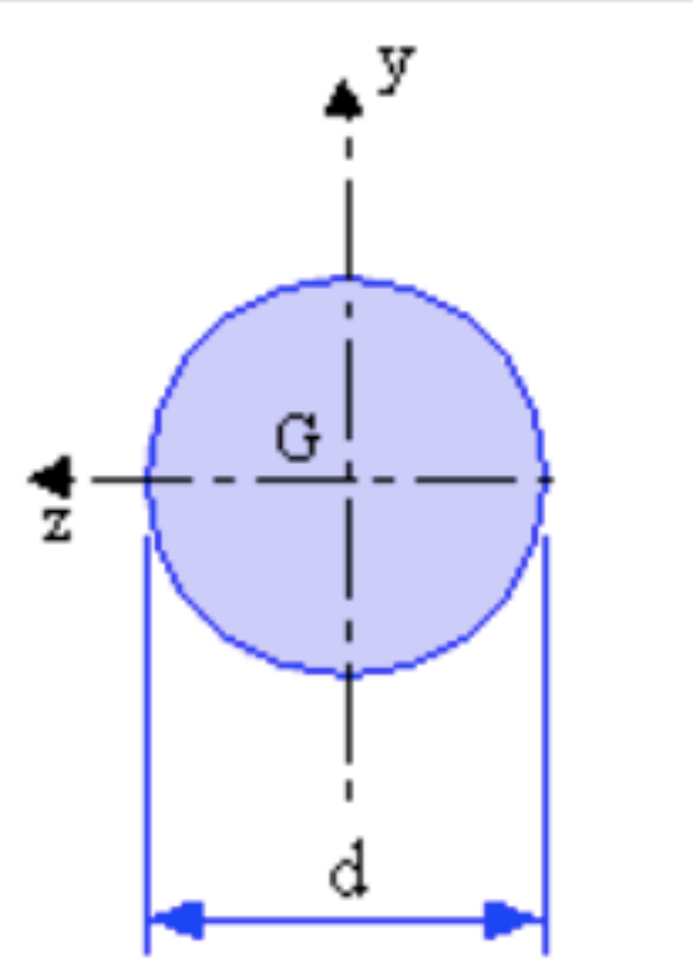
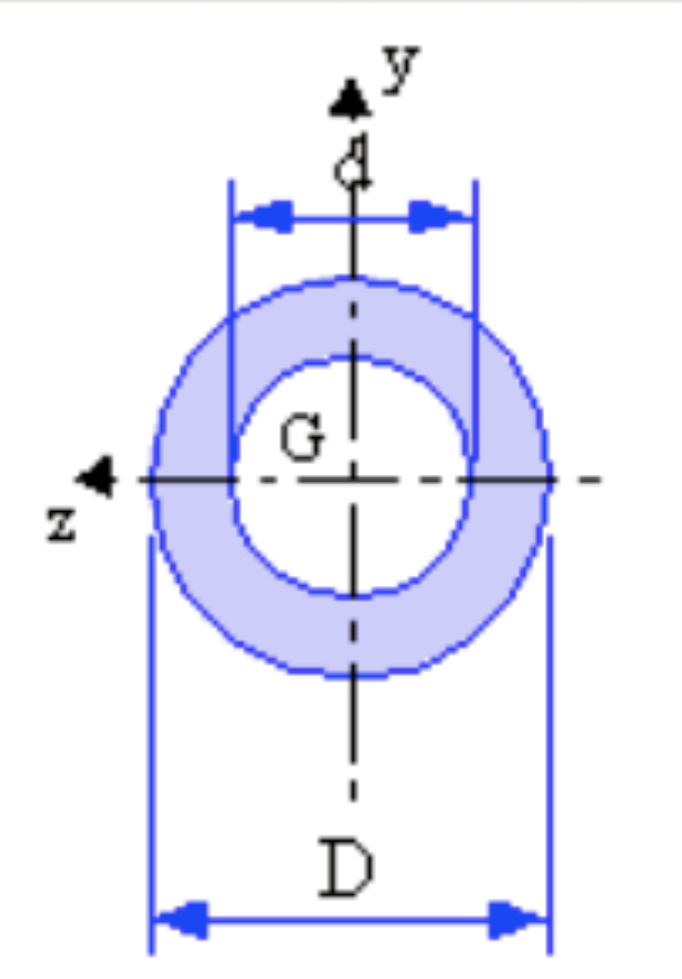
7. Tableau de synthèse

Contrainte

Déformation

<p>Torsion</p>	$\begin{Bmatrix} 0 & M_{tx} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$		$\tau(M) = \frac{M_{tx}}{I_0} \cdot y$	$\alpha(M) = \frac{M_{tx} \cdot x}{G \cdot I_0} \approx \frac{M_{tx} \cdot x}{0,4 \cdot E \cdot I_0}$
<p>Flexion pure</p>	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}$		$\sigma(M) = \frac{M_{fz}}{I_{Gz}} \cdot y$	$y''(x) = \frac{M_{fz}}{E \cdot I_{Gz}}$

8. Moment polaires et quadratiques

			
$I_{Gz} = \frac{bh^3}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi (D^4 - d^4)}{64}$
$I_0 = \frac{bh^3 + hb^3}{12}$	$\frac{a^4}{6}$	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi (D^4 - d^4)}{32}$

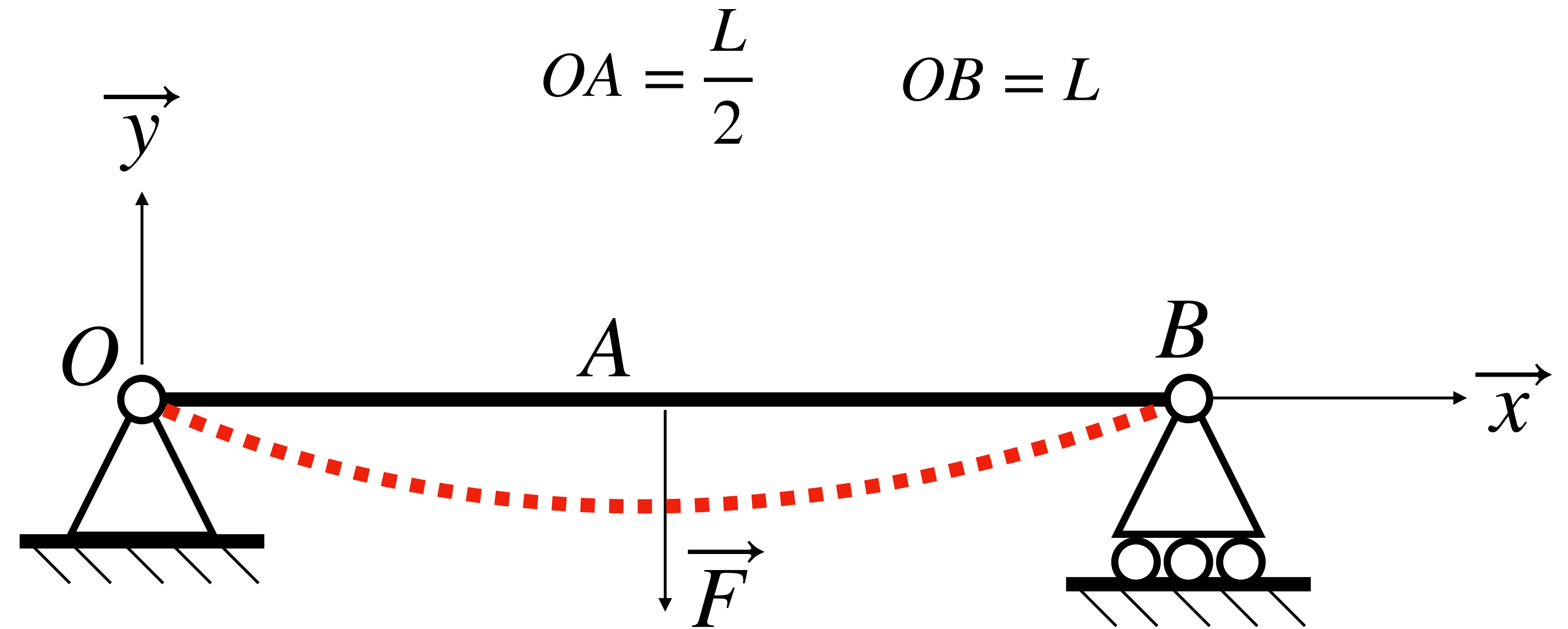
I_{Gz} moment quadratique de la section (mm^4)

I_0 moment polaire de la section (mm^4)

9. Exercice de cours



Réel



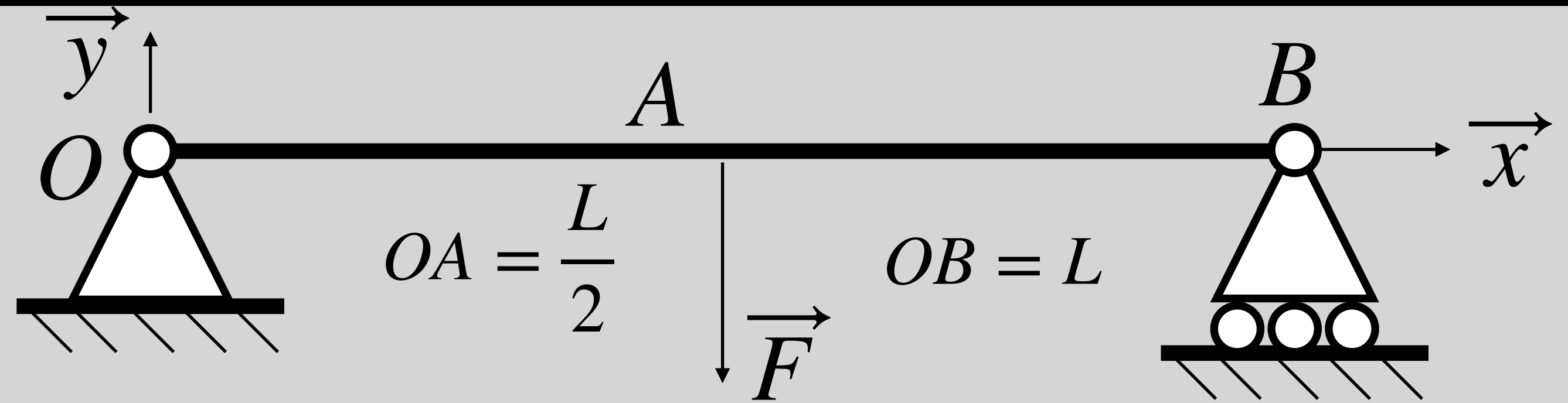
Modèle poutre

1. Déterminer la flèche $y(x)$ sur le tronçon $[OA]$.
2. Déterminer la flèche $y(x)$ sur le tronçon $[AB]$.
3. Déterminer les 2 conditions aux limites et les 2 conditions de continuité.
4. En déduire la position et l'expression de la flèche maximale y_{max} .

$$\{T_{coh}\}_{OA} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{F}{2} & 0 \\ 0 & \frac{F}{2} \cdot x \end{Bmatrix} \quad \{T_{coh}\}_{AB} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{F}{2} & 0 \\ 0 & \frac{F}{2} \cdot (L - x) \end{Bmatrix}$$

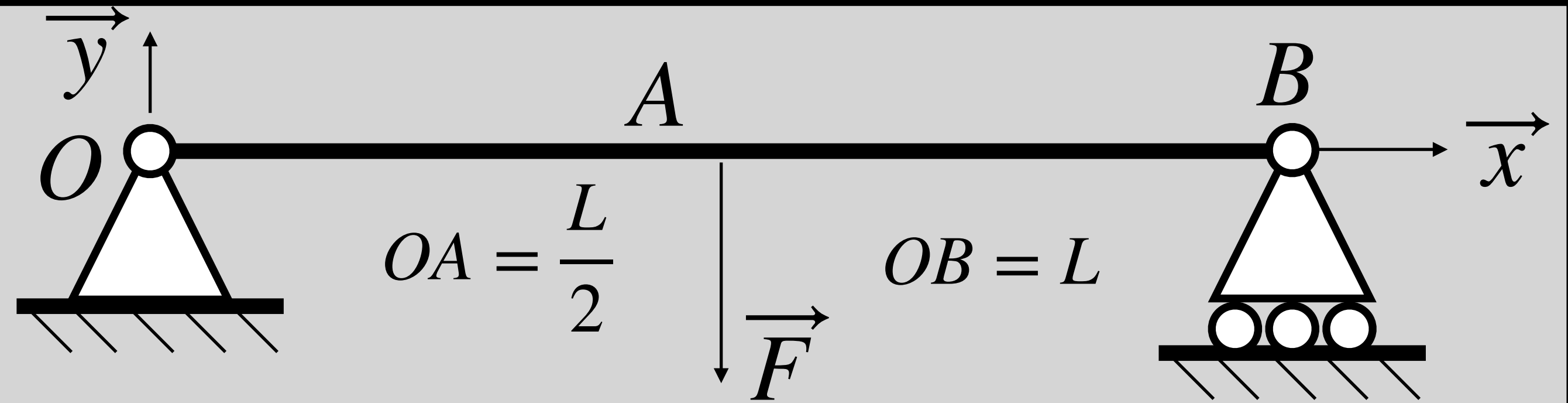
9. Exercice de cours

1. Déterminer la flèche $y(x)$ sur le tronçon $[OA]$.



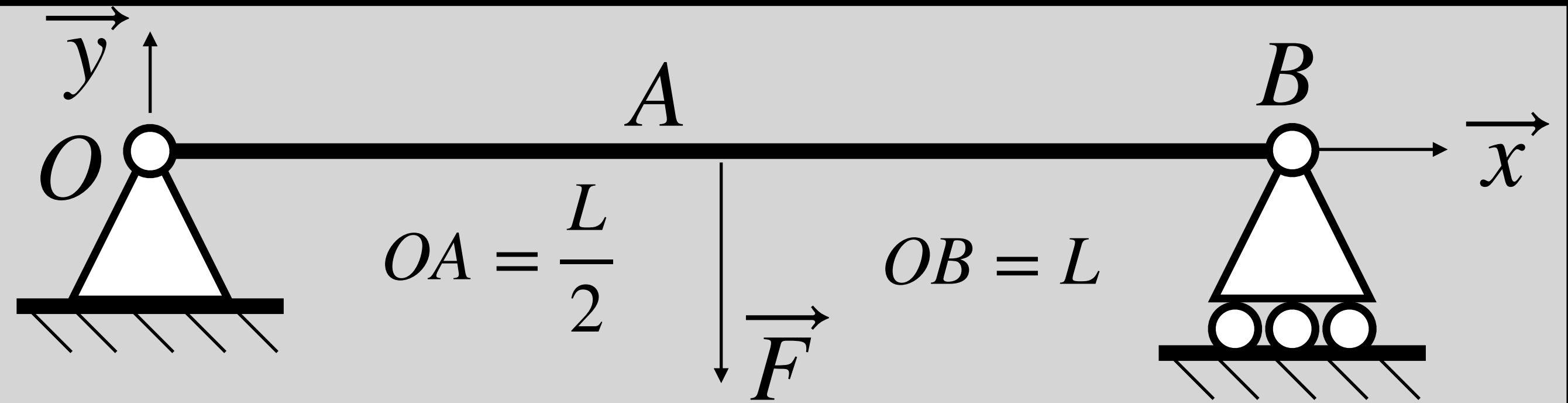
9. Exercice de cours

2. Déterminer la flèche $y(x)$ sur le tronçon $[AB]$.



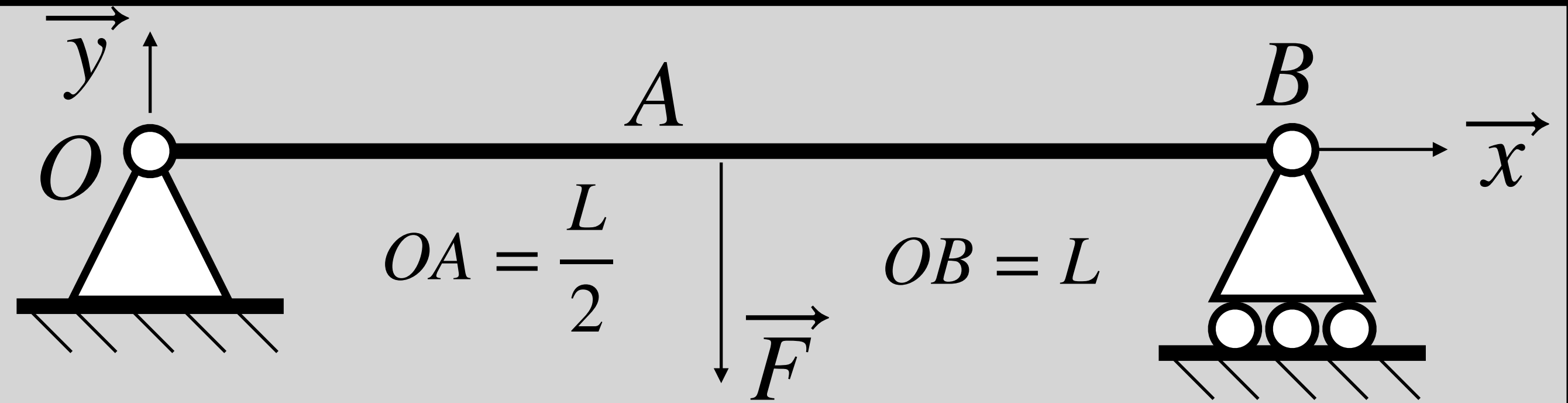
9. Exercice de cours

3. Déterminer les 2 conditions aux limites et les 2 conditions de continuité.



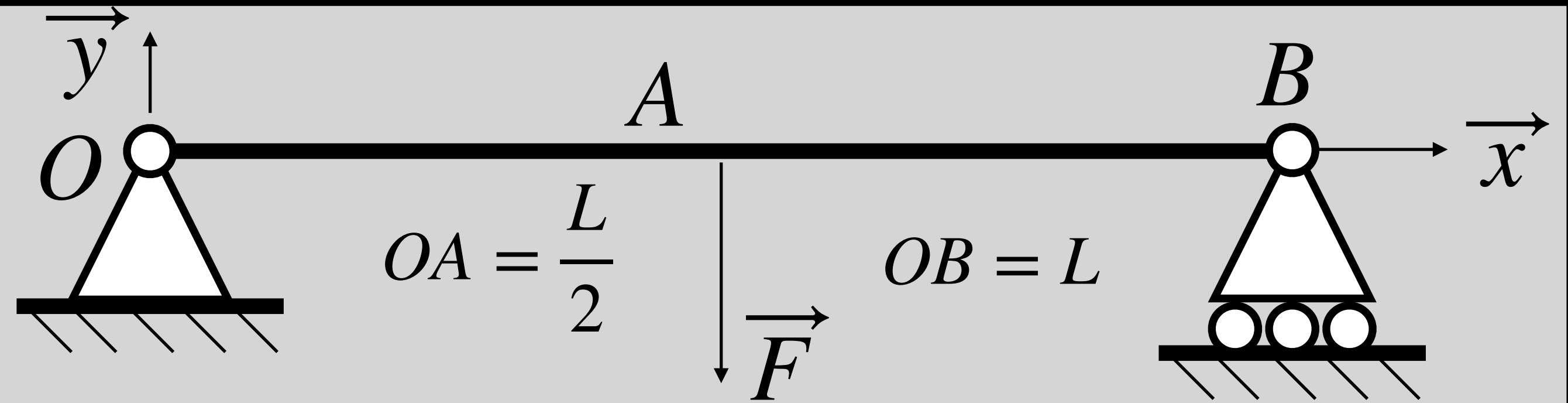
9. Exercice de cours

4. En déduire la position et l'expression de la flèche maximale y_{max} .



9. Exercice de cours

4. En déduire la position et l'expression de la flèche maximale y_{max} .



9. Exercice de cours

4. En déduire la position et l'expression de la flèche maximale y_{max} .

