Principe fondamental de la dynamique

Chapitre 1: inertie d’un solide

F. BLASCHECK

UNE VISION D'AVENIR DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE
Lycée Eiffel DIJON

Chapitre 1: inertie d’un solide

F. BLASCHECK

UNE VISION D'AVENIR DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE
Lycée Eiffel DIJON

1. Problématique de la dynamique

Les efforts extérieurs appliqués à un solide ou un ensemble de solides peuvent engendrer du mouvement.

L'inertie d'un solide ou d'un ensemble de solides peut modifier le mouvement.

1. Problématique de la dynamique

La problématique de **la dynamique** est **la prise en compte de l'inertie des solides** dans la détermination du mouvement.

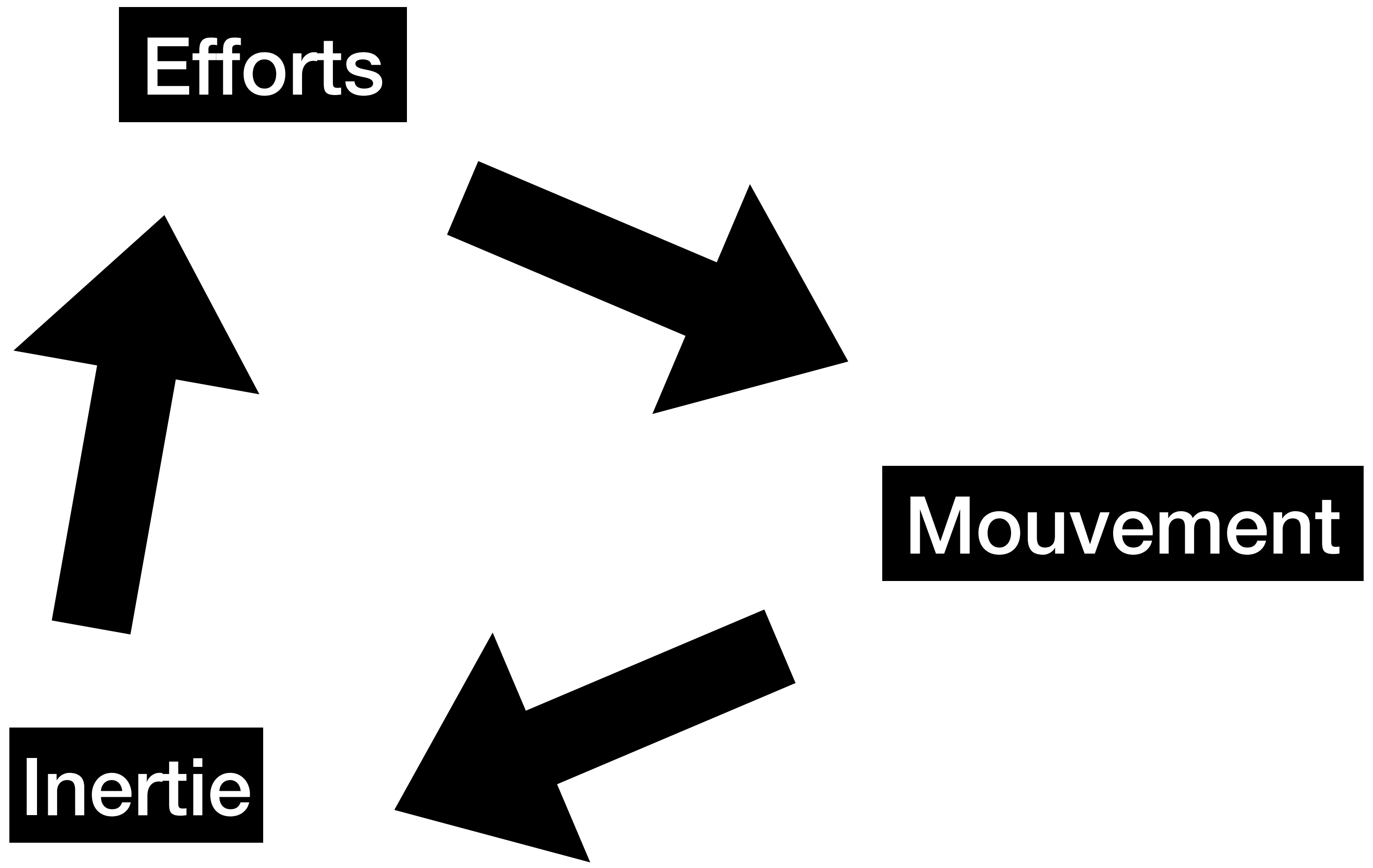
La dynamique fait **le lien entre le mouvement, les efforts appliqués et l'inertie** des solides constitutifs du système.

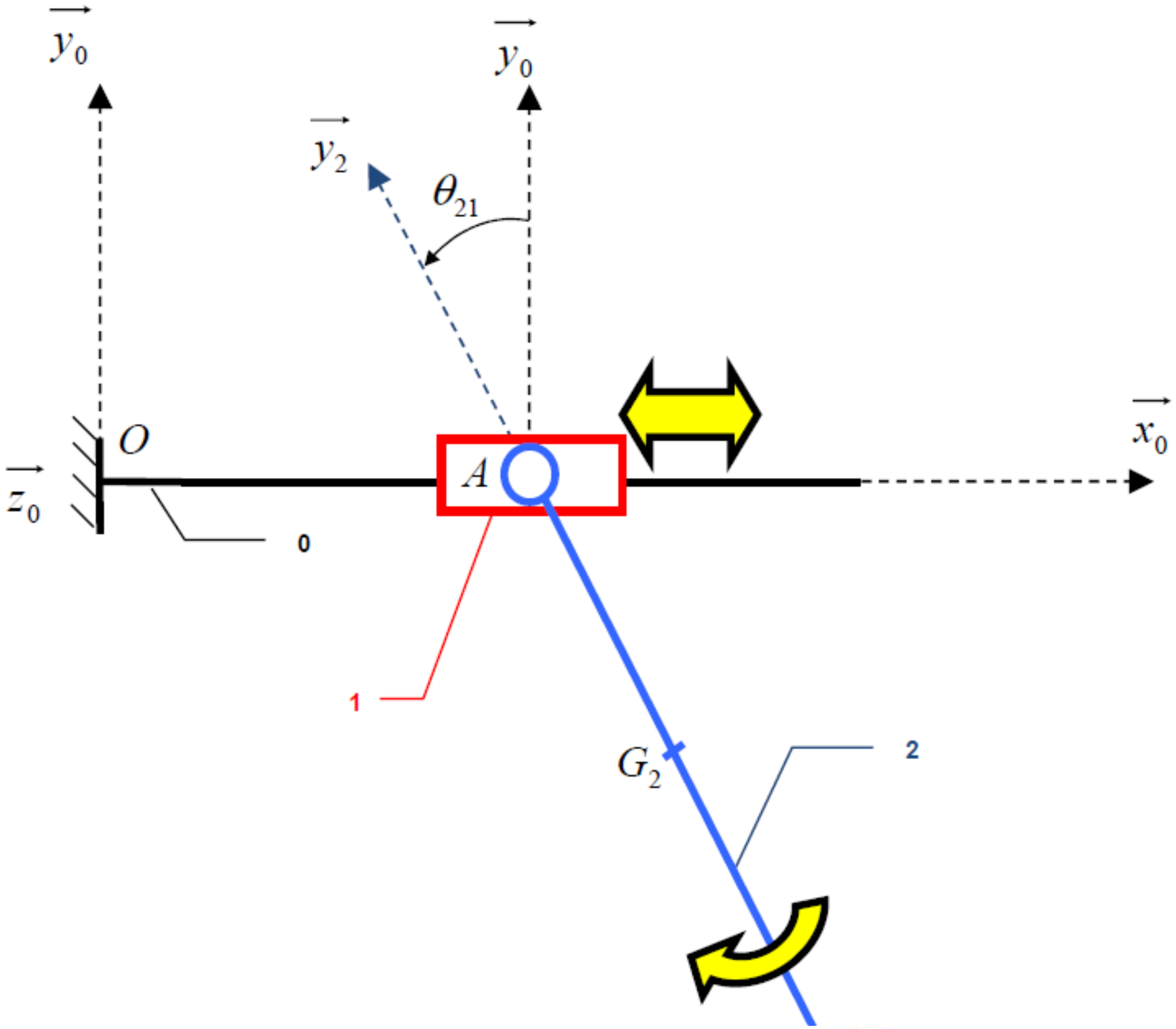
Porte container sur câbles : problème dynamique d'oscillations fonction de la translation et de l'inertie du container

F. BLASCHECK

1. Problématique de la dynamique

Le câble et le container oscillent lorsque le moteur déplace l’ensemble en translation. **Plus le container est lourd plus les oscillations sont grandes** et dangereuses.





2. Masse d’un solide, d’un ensemble de solides

Lorsque le mouvement est à un seul degré de liberté, l’inertie influe sur le mouvement en **s’y opposant ou en l’entretenant.**

masse totale de 630 kg
40 km/h atteints en 15 m par les pousseurs
MRUA

2. Masse d'un solide, d'un ensemble de solides

La masse d'un solide caractérise **l'inertie de ce solide lorsque son mouvement est une translation**.

Elle représente la « quantité de matière résistante » pour lancer le mouvement ou la « quantité de matière entraînante » lors d'une phase de freinage.

$$\boxed{m_S = \rho \,.\, V}$$

m_S :masse du solide en Kg

ρ : masse volumique du matériau en $Kg \,.\, m^{-3}$

V : volume de matière en m^3

Lorsque l'on étudie un ensemble de solides, on applique **le principe de superposition** :

$$\boxed{m_E = m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \Sigma m_i}$$

m_E :masse de l'ensemble en Kg

n : nombre de solides

m_i : masse du solide i en Kg

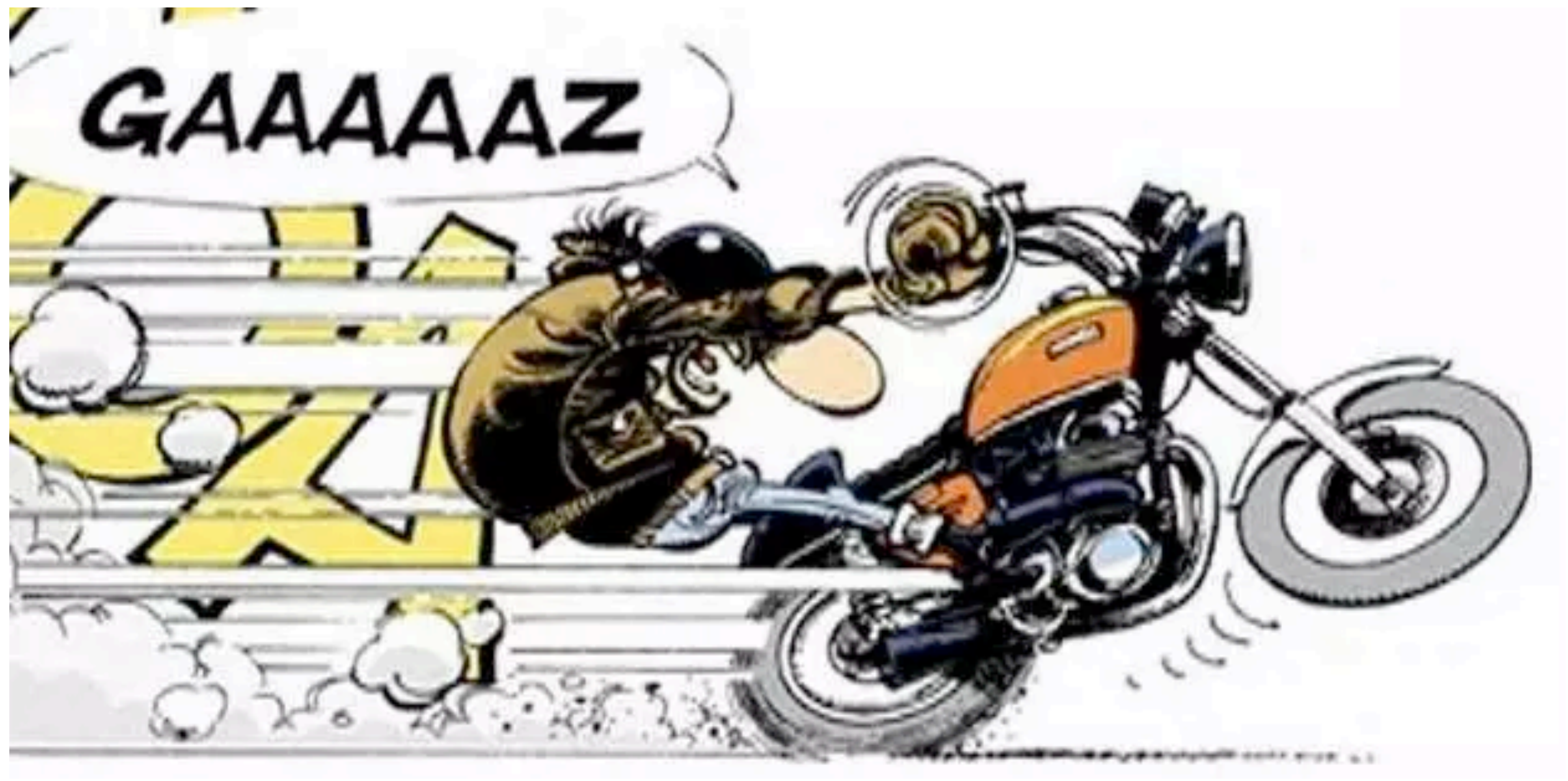
2. Masse d’un solide, d’un ensemble de solides

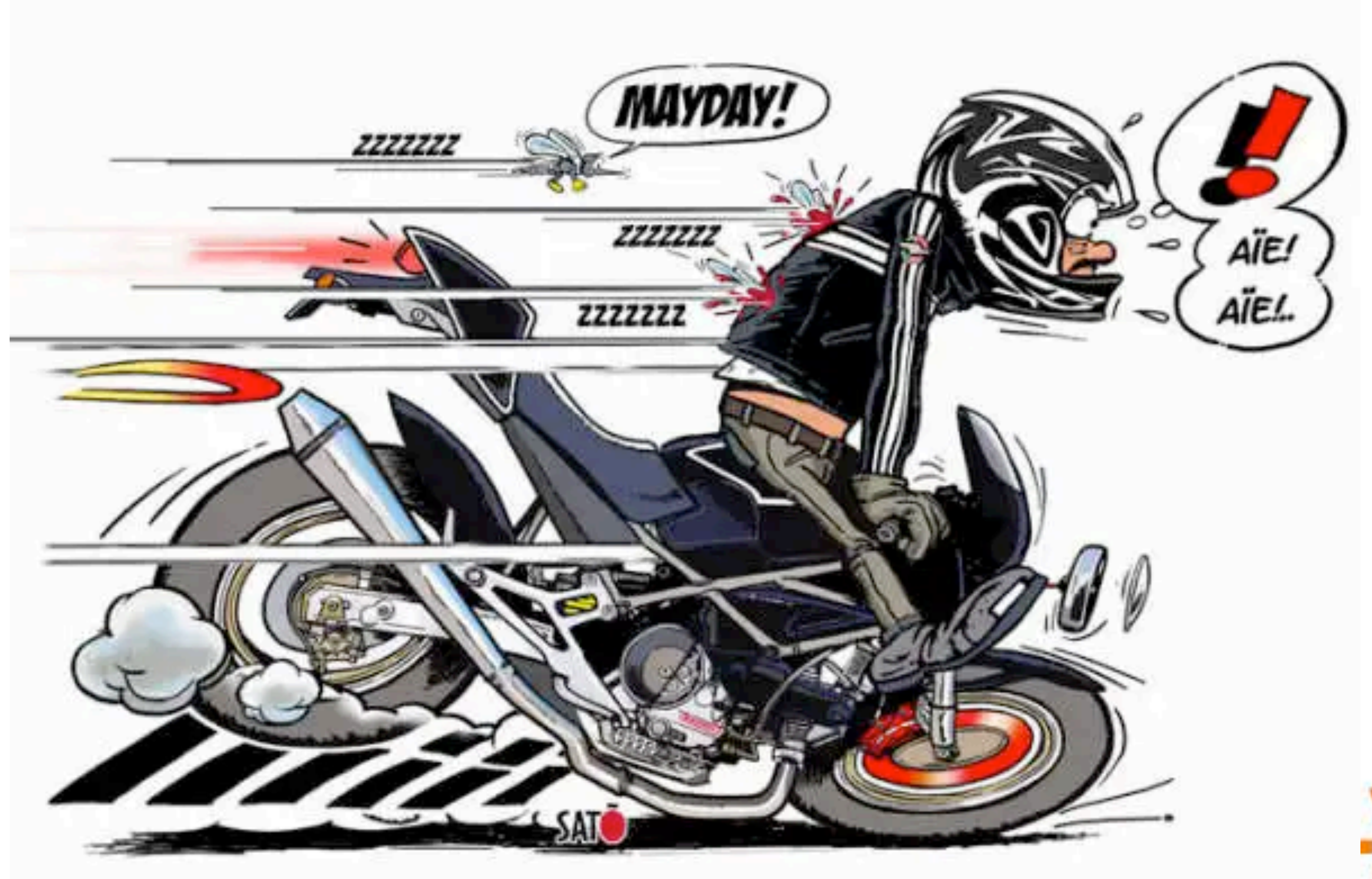
Ainsi, la force à appliquer pour mettre le solide (ou l’ensemble de solides) en translation est appelée **la résultante dynamique par rapport au référentiel Galiléen :**

$$\boxed{\overrightarrow{R}_d(S/R_0) = m_S \, . \, \overrightarrow{a}(G\epsilon S/R_0)}$$

S : solide
m_S : masse du solide en Kg
$\overrightarrow{a}$: vecteur accélération
G : centre d’inertie du solide
R_0 : référentiel Galiléen

Bien sûr, si le solide est **en phase de décélération** (accélération négative), **la résultante dynamique s’oppose au mouvement**.

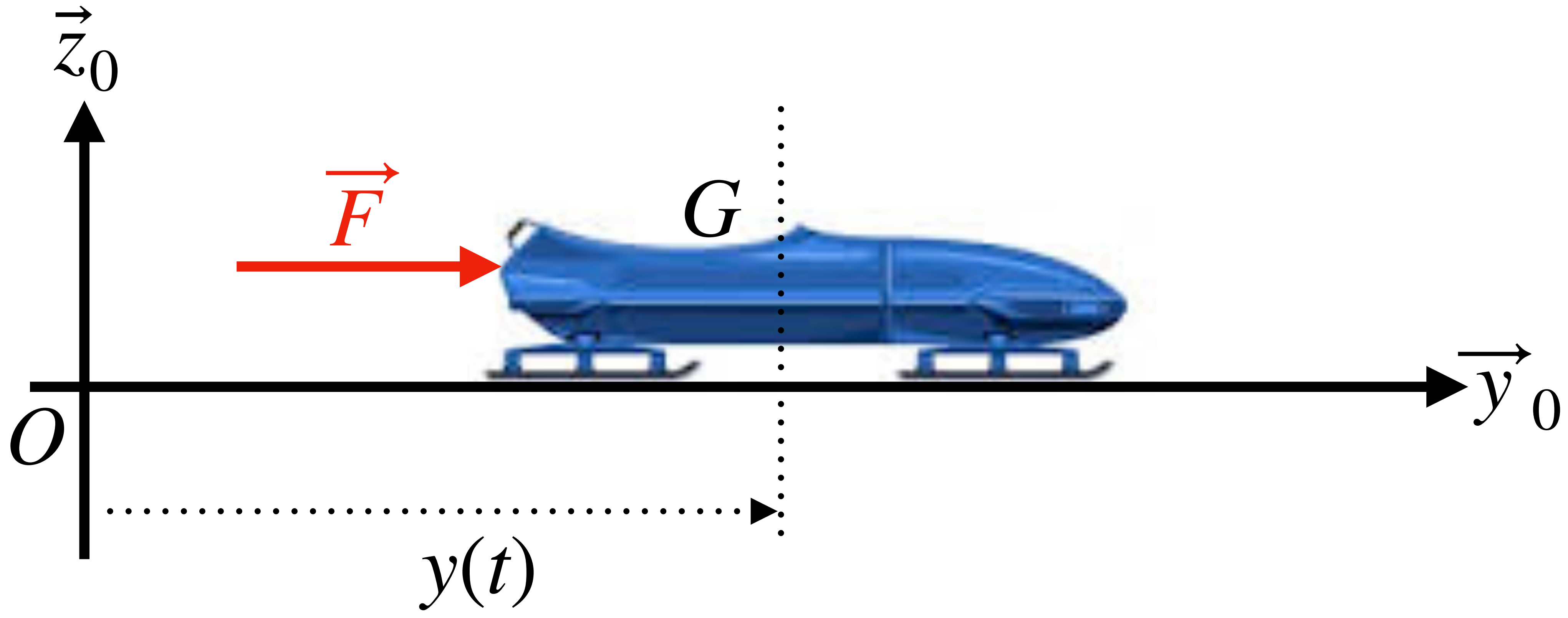




2. Masse d'un solide, d'un ensemble de solides

Quelle force doivent appliquer les pousseurs pour lancer le bobsleigh ?

630 kg , 40 km/h en 15 m

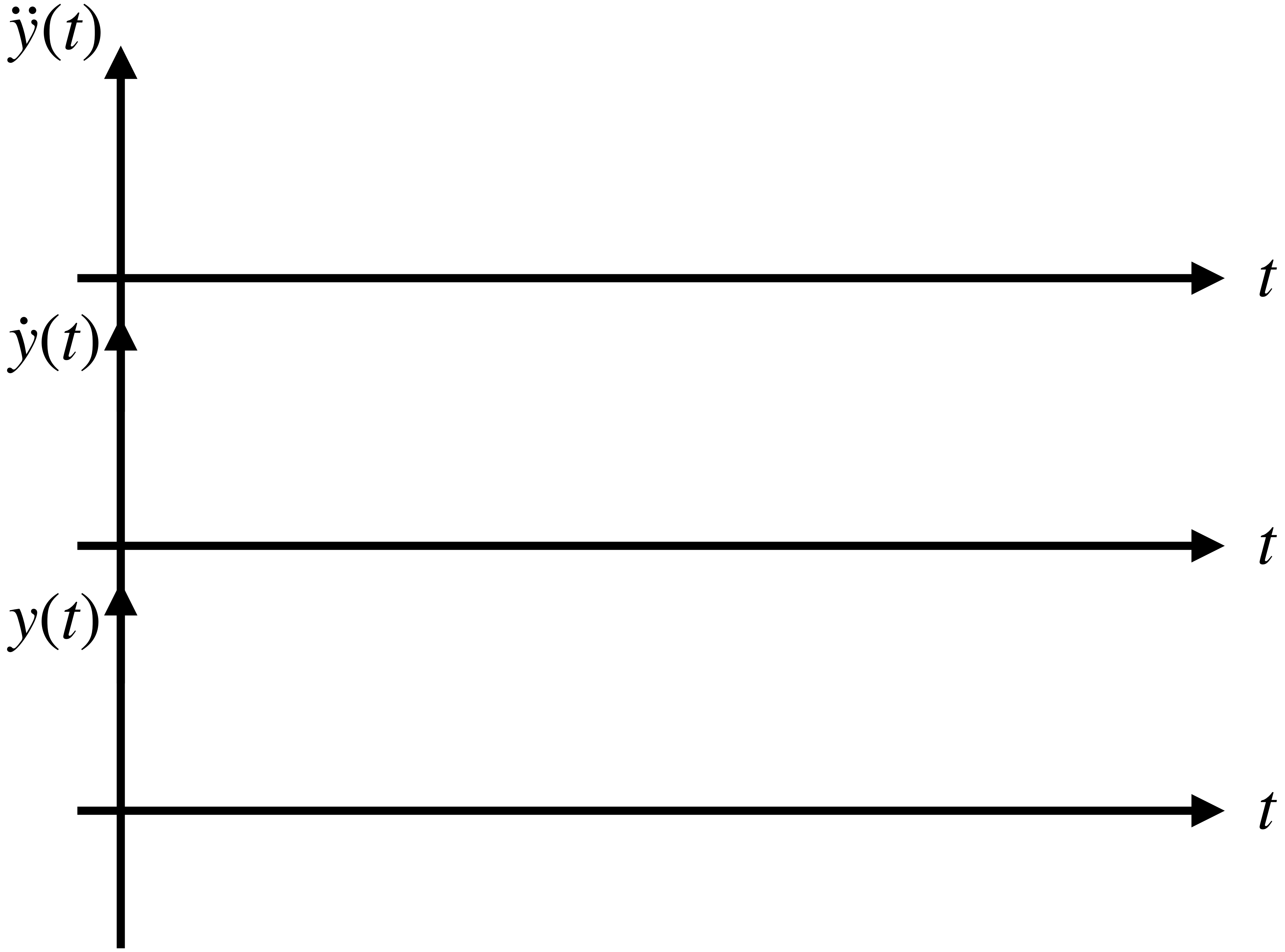


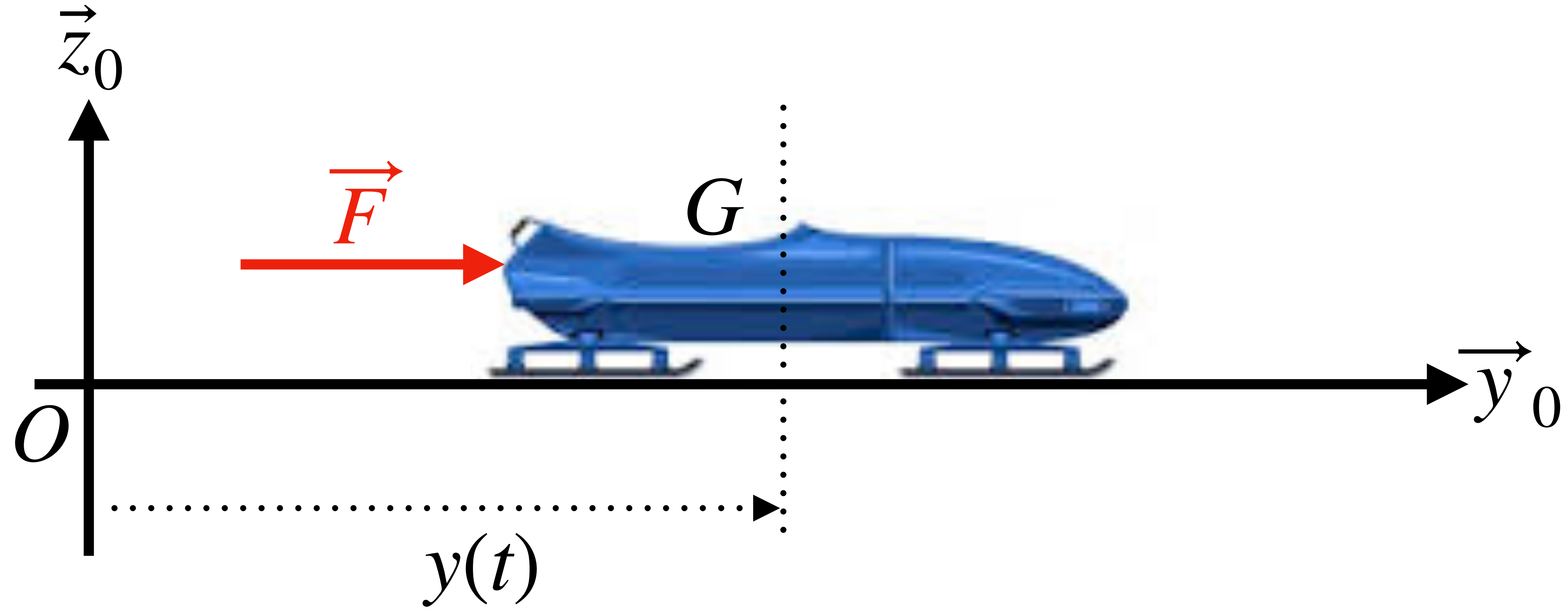
$$\boxed{\vec{R}_d(S/R_0) = m_S \,.\, \vec{a}(G \epsilon S/R_0)}$$

Méthode :

On fait un MRUA pour déterminer l'accélération du bobsleigh !

1. Tracer l'évolution de la vitesse, de l'accélération et de la position lors de la phase d'accélération.

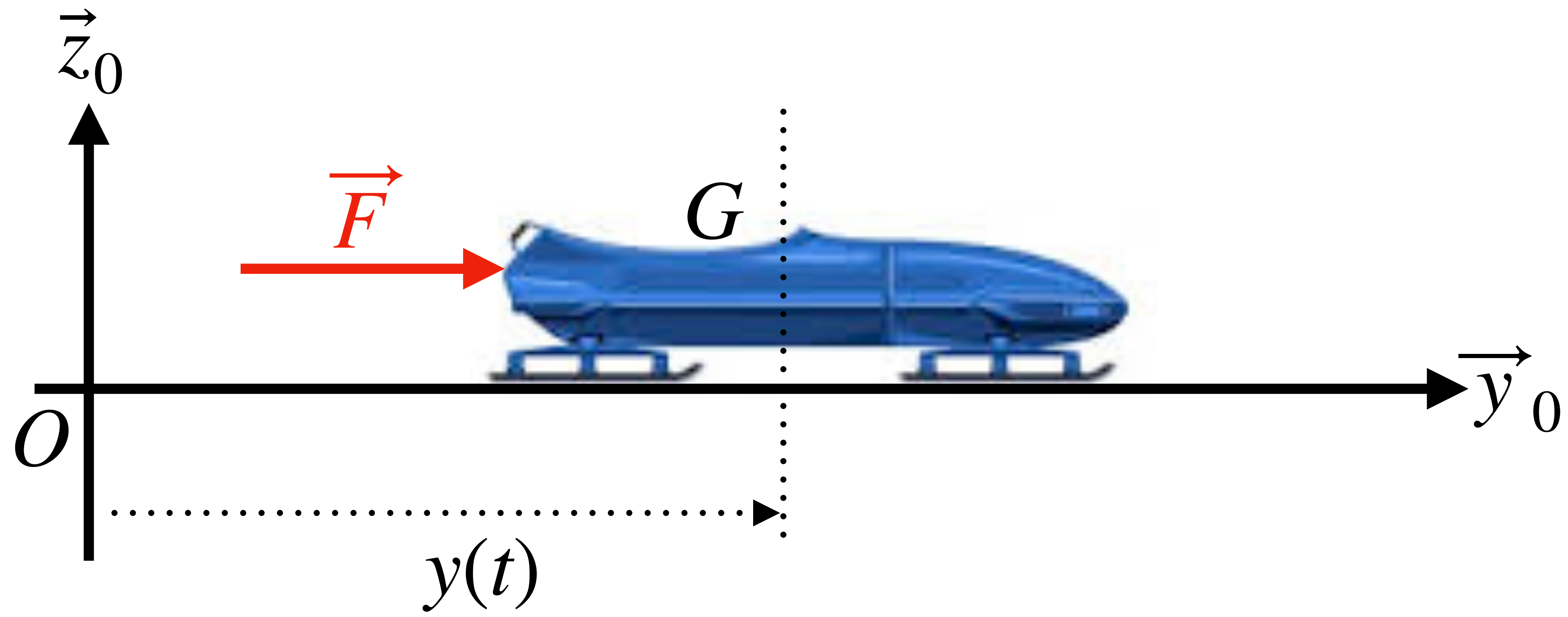




2. Calculer le temps t_a de la phase d'accélération.

Je dois savoir refaire cela !

3. En déduire l'accélération a subie par le bobsleigh lors de la phase d'accélération.



4. Déterminer la force à fournir par les pousseurs pour assurer un bon départ. Calculer la puissance maximale développée par l'équipage.

3. Moment d’inertie, notion de moment dynamique

Lorsque le mouvement est une rotation autour d’un axe, le moment inertie influe sur le mouvement en **s’y opposant ou en l’entretenant.**

8 kg, 1.2 m, 30 m/s en 3s

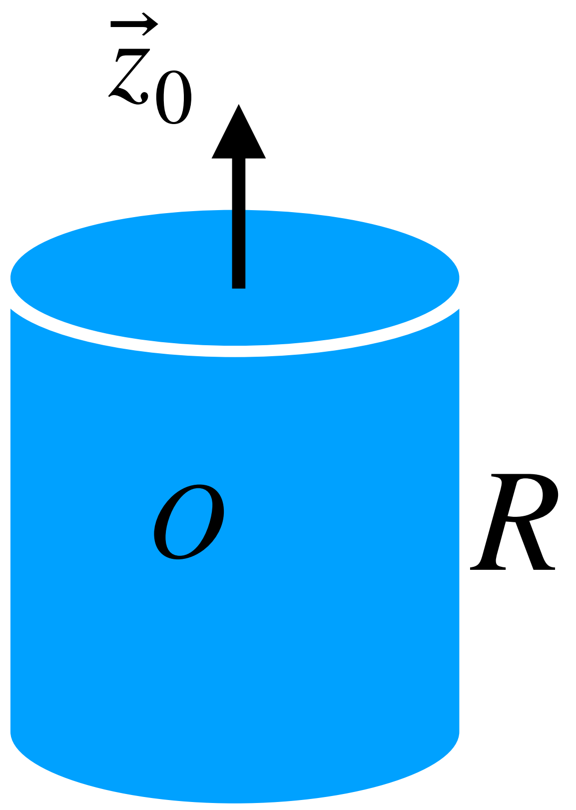
MRUA

3. Moment d’inertie, notion de moment dynamique

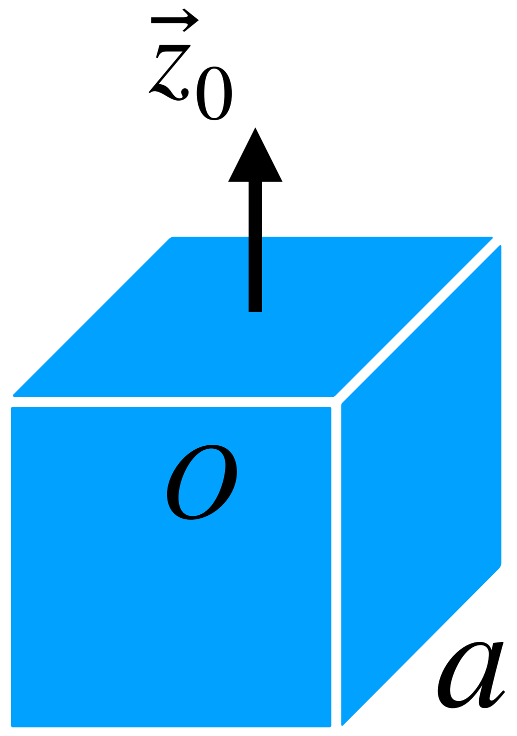
Le moment d’inertie d’un solide caractérise **l’inertie de ce solide lorsque son mouvement est une rotation autour d’un axe.**

Elle représente la « quantité de matière résistante » pour lancer le mouvement ou la « quantité de matière entraînante » lors d’une phase de freinage.

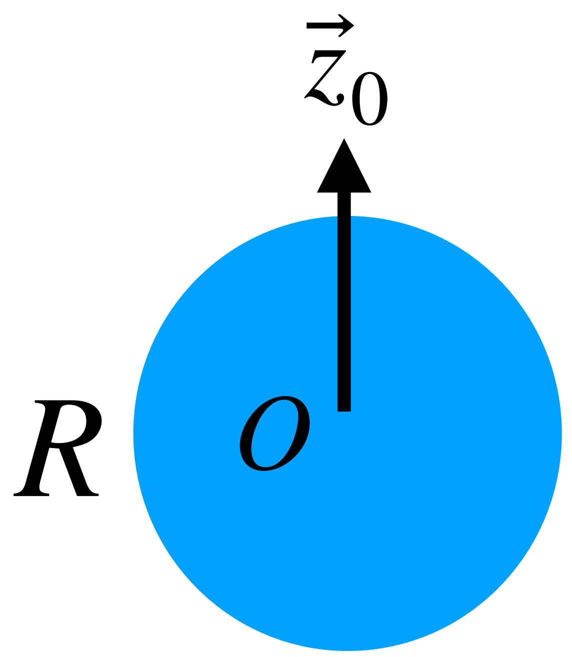
Je dois connaitre cela par coeur !



$$\boxed{J(O,\vec{z}_0) = m_S \,.\, \frac{R^2}{2}}$$



$$\boxed{J(O,\vec{z}_0) = m_S \,.\, \frac{a^2}{6}}$$



$$\boxed{J(O,\vec{z}_0) = m_S \,.\, \frac{2}{5} R^2}$$

$J(O,\vec{z}_0)$: moment d’inertie en $Kg\,.\,m^2$

m_S :masse du solide en Kg

R : rayon en m

a : longueur d’une arête en m

3. Moment d'inertie, notion de moment dynamique

Ainsi, le couple à appliquer pour mettre le solide (ou l'ensemble de solides) en rotation <u>**autour d'un axe**</u> est appelée **le moment dynamique par rapport au référentiel Galiléen :**

$$\boxed{\overrightarrow{\delta}_d(O, S/R_0) = J(O, \vec{z}_0) \, . \, \frac{d\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)}{dt}}$$

S : solide
$J(O, \vec{z}_0)$: moment d'inertie en $Kg \, . \, m^2$
$\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$: vecteur rotation
$\overrightarrow{\delta}_d(O, S/R_0)$: moment dynamique
R_0 : référentiel Galiléen

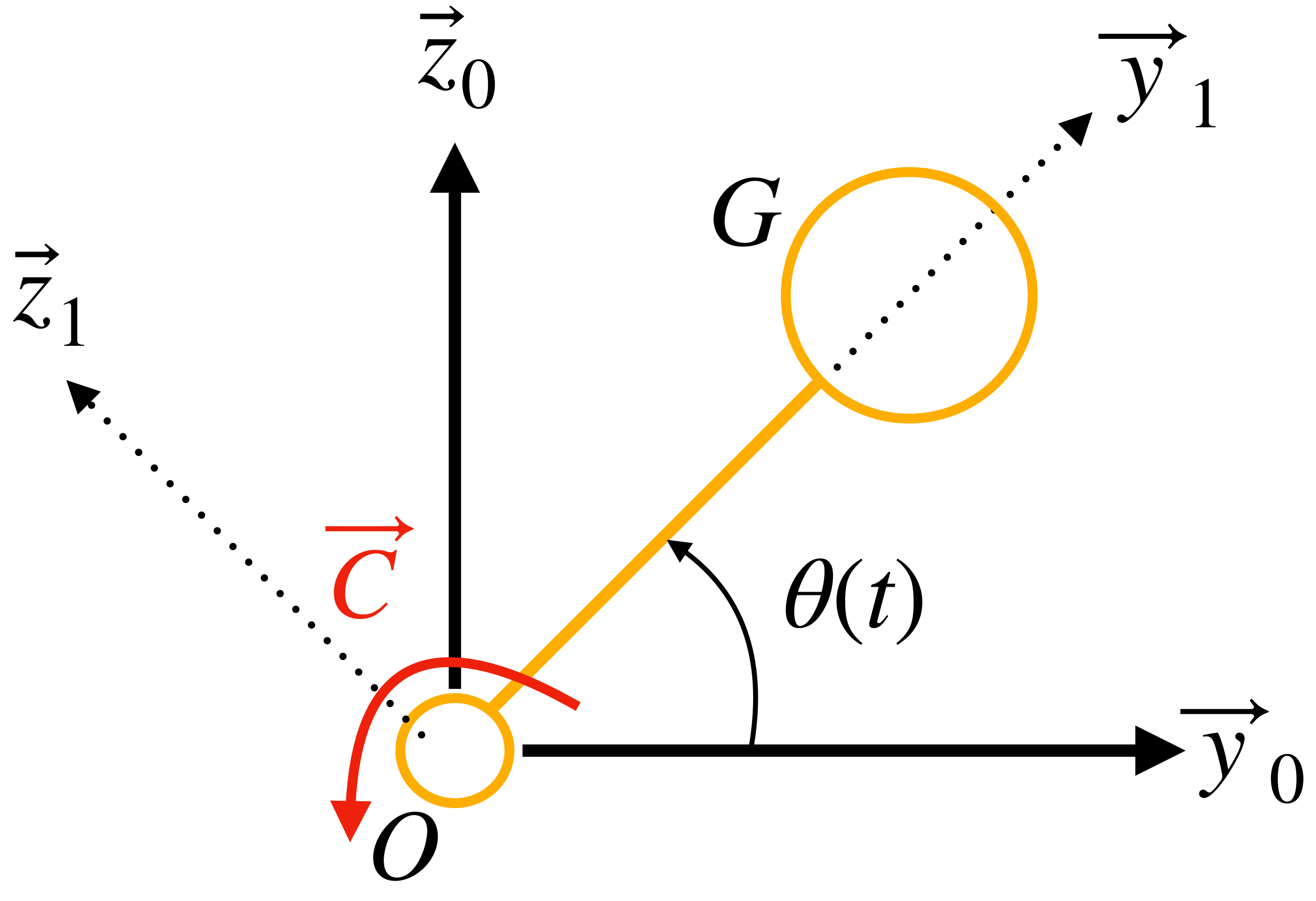
Bien sûr, si le solide est **en phase de décélération** (accélération angulaire négative), **le moment dynamique s'oppose au mouvement.**

F. BLASCHECK

3. Moment d'inertie, notion de moment dynamique

Quel couple doit fournir l'athlète pour lancer le marteau ? 8 kg, 1.2m, 30 m/s en 3 s

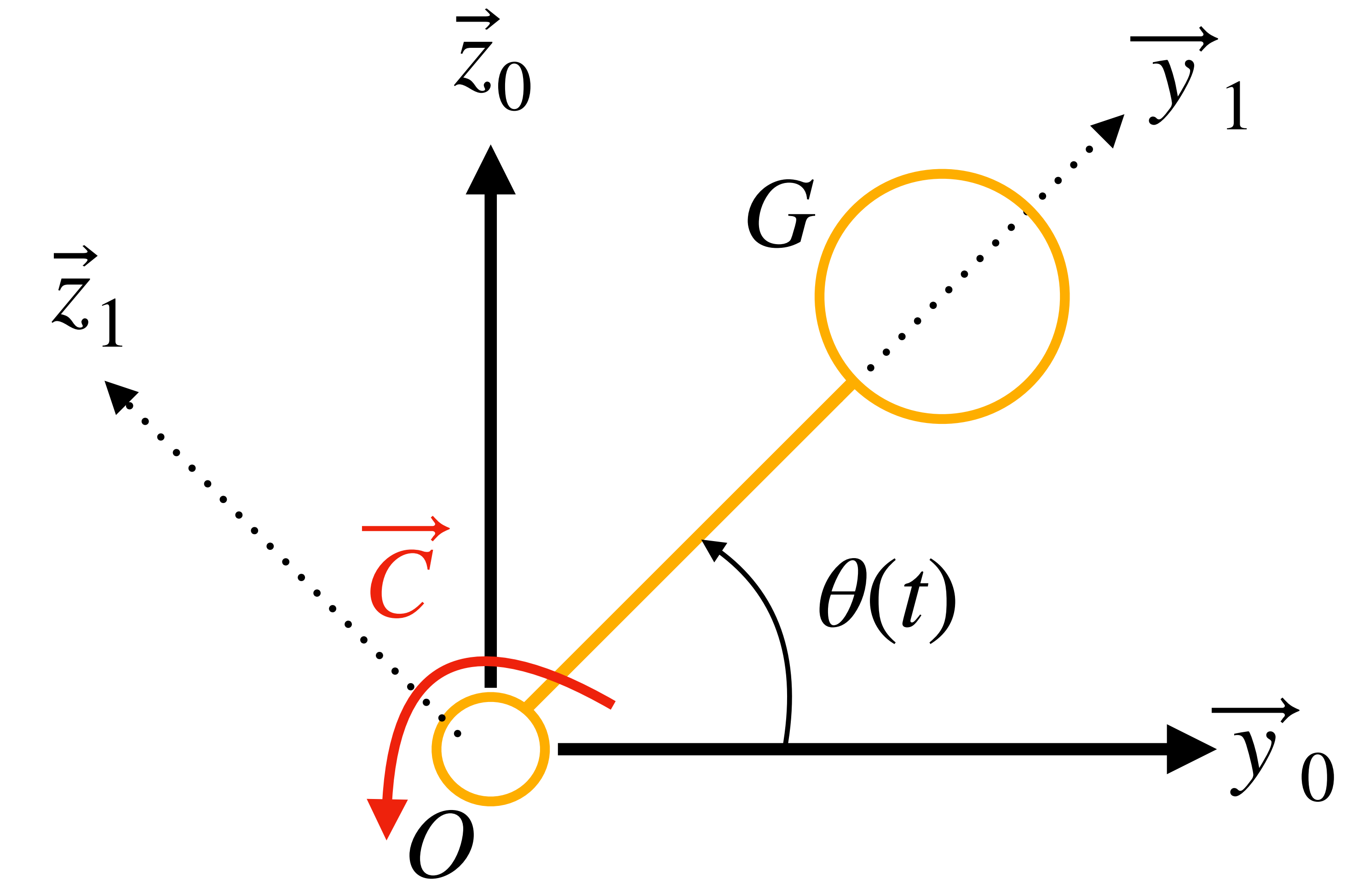
$$\boxed{\vec{\delta}_d(O, S/R_0) = J(O, \vec{z}_0) \, . \, \frac{d\vec{\Omega}(S/R_0)}{dt}}$$



1. Tracer la figure angulaire de changement de base.
2. Calculer la vitesse $\vec{V}(G \epsilon S/R_0)$.
3. Calculer l'accélération $\vec{a}(G \epsilon S/R_0)$ puis la résultante dynamique.
4. Calculer le moment en O de la résultante dynamique. En déduire le couple à fournir par l'athlète.

F. BLASCHECK

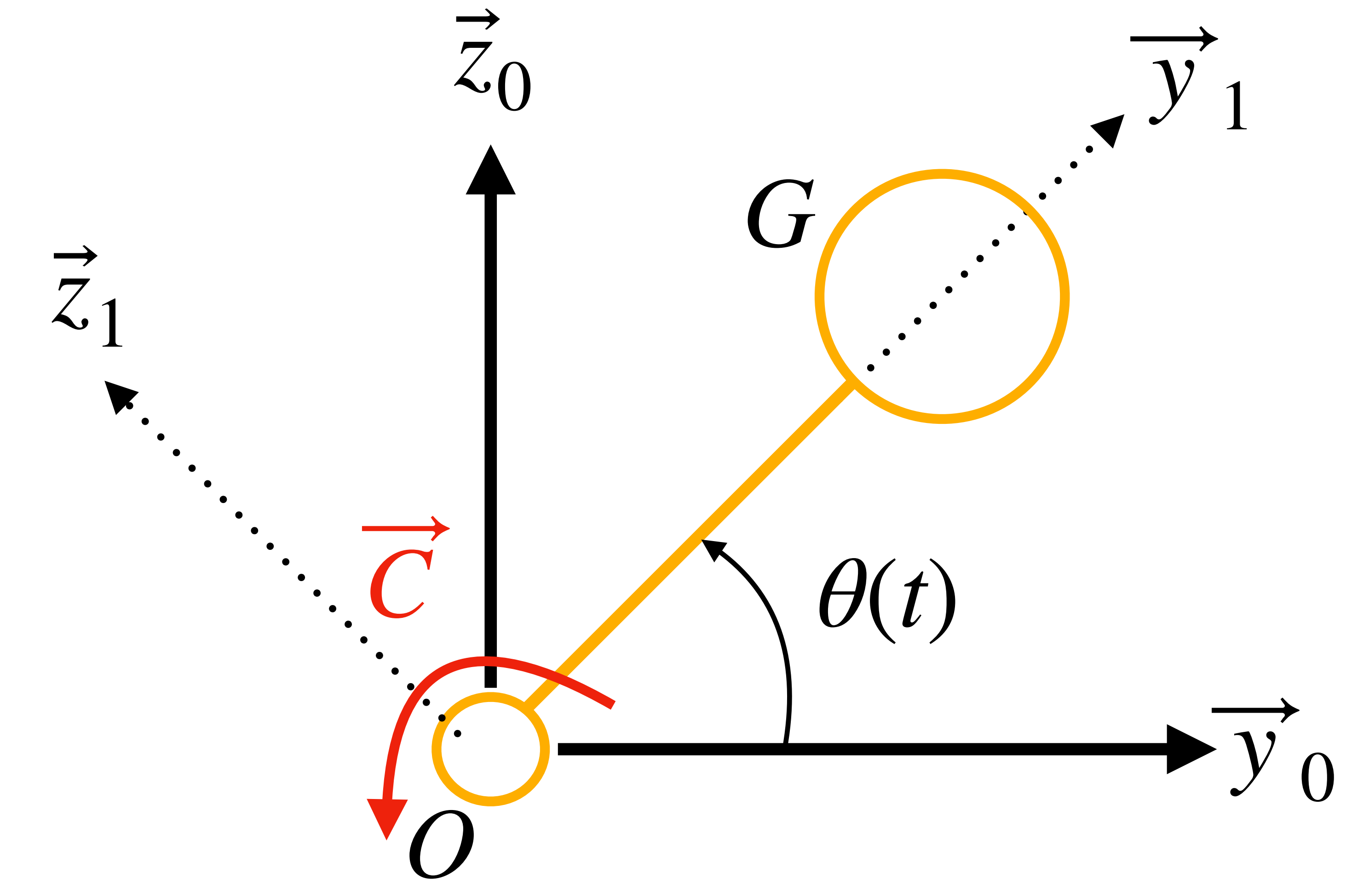
1. Tracer la figure angulaire de changement de base.



2. Calculer la vitesse $\overrightarrow{V}(G \epsilon S/R_0)$.

Je dois savoir refaire cela !

3. Calculer l'accélération $\overrightarrow{a}(G \epsilon S/R_0)$ puis la résultante dynamique.

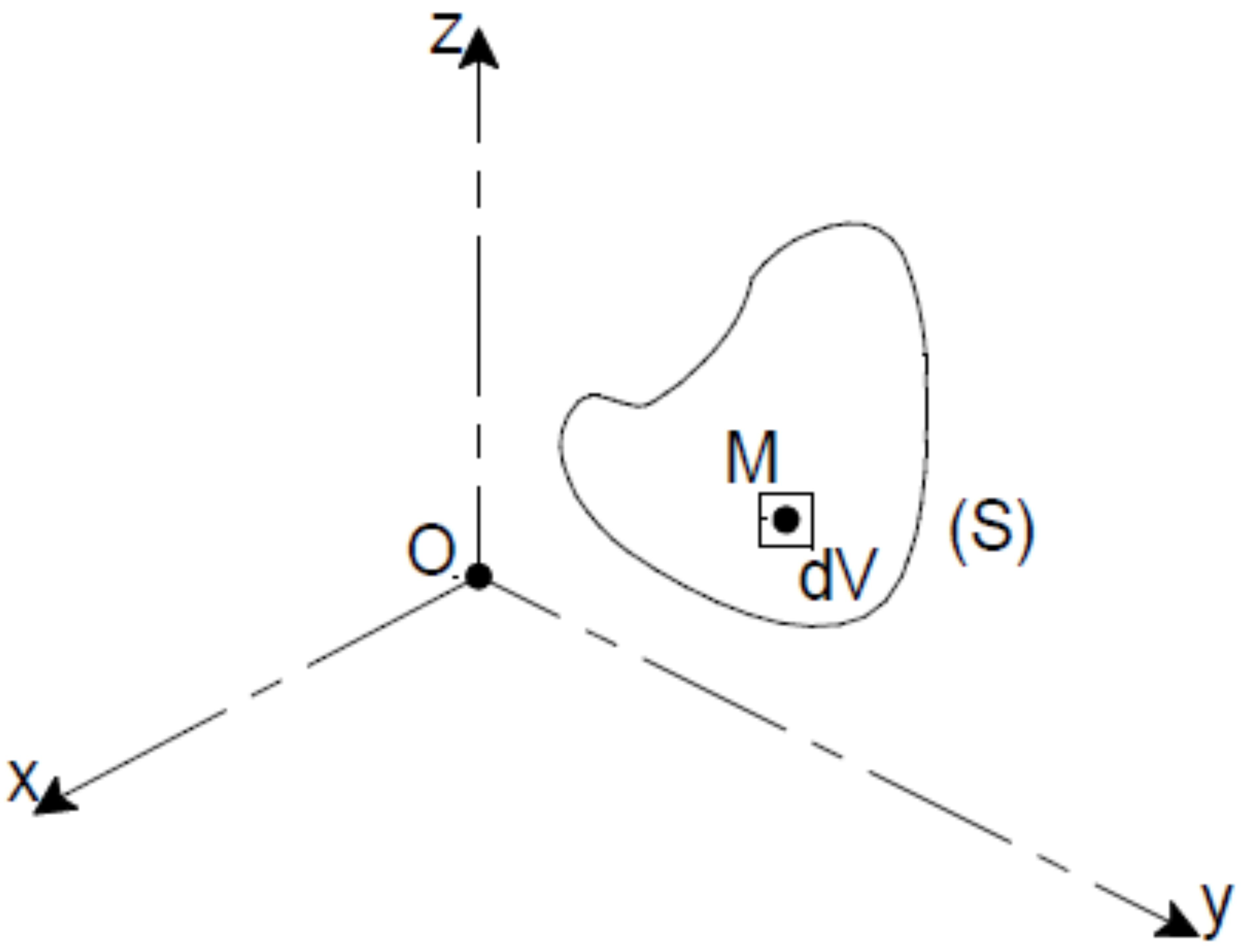


4. Calculer le moment en O de la résultante dynamique. En déduire le couple à fournir par l'athlète.

Je dois savoir refaire cela !

4. Centre d'inertie

Le centre d'inertie G d'un solide est le point autour duquel **la matière est équi-répartie dans toutes les directions** :



$$\boxed{\int \overrightarrow{GM} dm = \overrightarrow{0}}$$

NE PAS UTILISER !!!!

- le centre inertie est unique et confondu avec le centre de gravité ;
- le centre d'inertie peut être hors de la matière ;
- le centre d'inertie est situé sur les éléments de symétrie du solide.

4. Centre d'inertie

La recherche de la position du centre d'inertie d'un solide s'effectue à l'aide 2 techniques :

- **rechercher G à l'intersection des plans ou axes de symétrie du solide ;**
- **utiliser la formule du barycentre pour associer plusieurs solides ;**

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\Sigma[m_i \,.\, \overrightarrow{OG_i}]}{[\Sigma m_i]}}$$

G : centre d'inertie de l'ensemble des i solides
m_i : masse du solide i en Kg
G_i : centre d'inertie du solide i
O : un point quelconque de l'espace

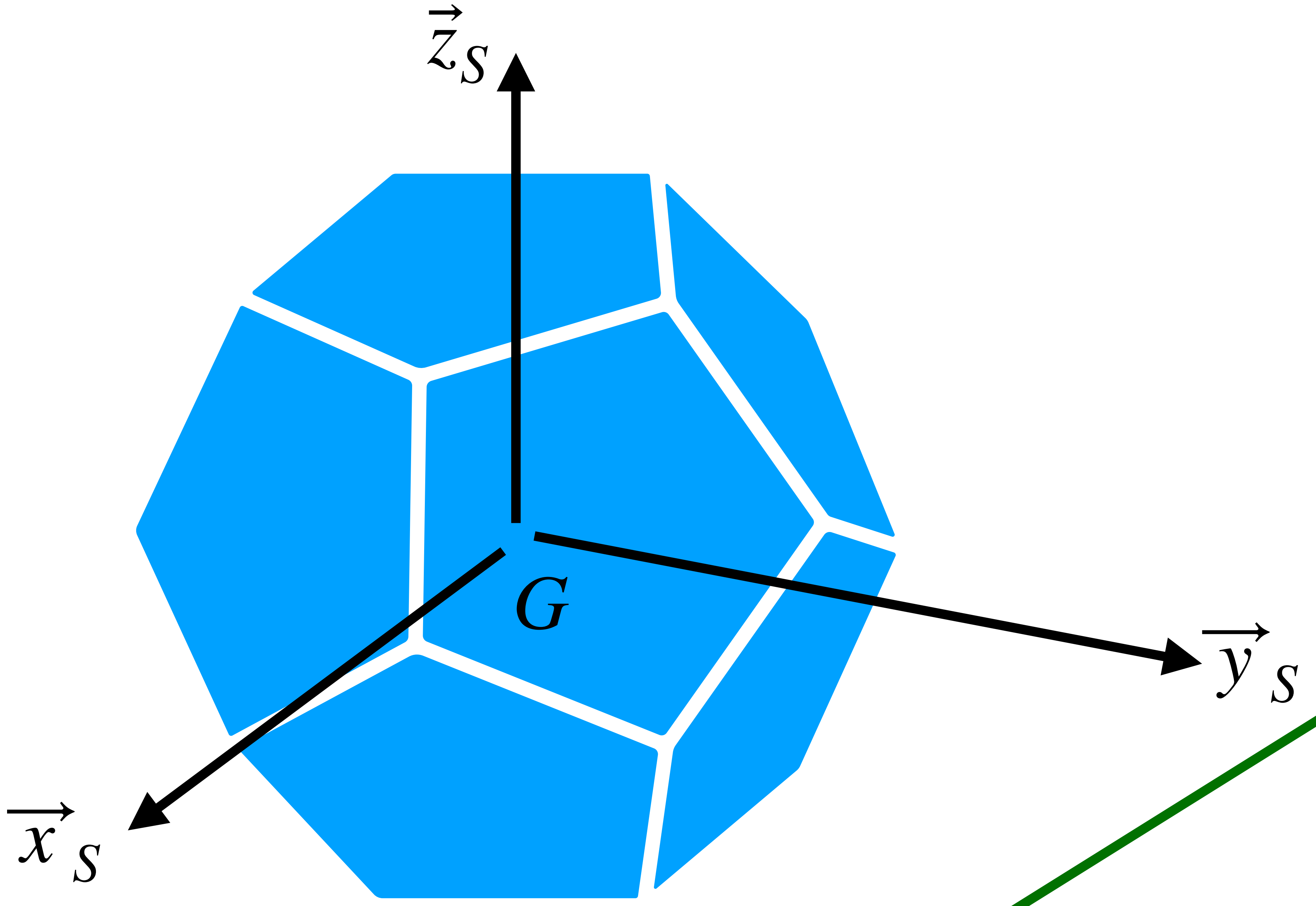
5. Matrice d'inertie

Définir un seul moment d'inertie pour un solide est insuffisant car il y a 3 rotations possibles dans l'espace. Il faut donc définir **les moments d'inertie par rapport à 3 axes de rotation** (indépendants et orthogonaux).

Ces moments d'inertie sont placés dans une matrice 3x3, et **forment la matrice d'inertie du solide en G dans la base $B_S = (\overrightarrow{x}_S, \overrightarrow{y}_S, \vec{z}_S)$.**

$$\boxed{I(G,S) = \begin{bmatrix} A = J(G, \overrightarrow{x}_S) & 0 & 0 \\ 0 & B = J(G, \overrightarrow{y}_S) & 0 \\ 0 & 0 & C = J(G, \vec{z}_S) \end{bmatrix}_{B_S}}$$

5. Matrice d'inertie



$$I(G,S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{B_S}$$

moment d'inertie par rapport à l'axe $(G, \overrightarrow{x}_S)$

$\boxed{J(G, \overrightarrow{x}_S)}$

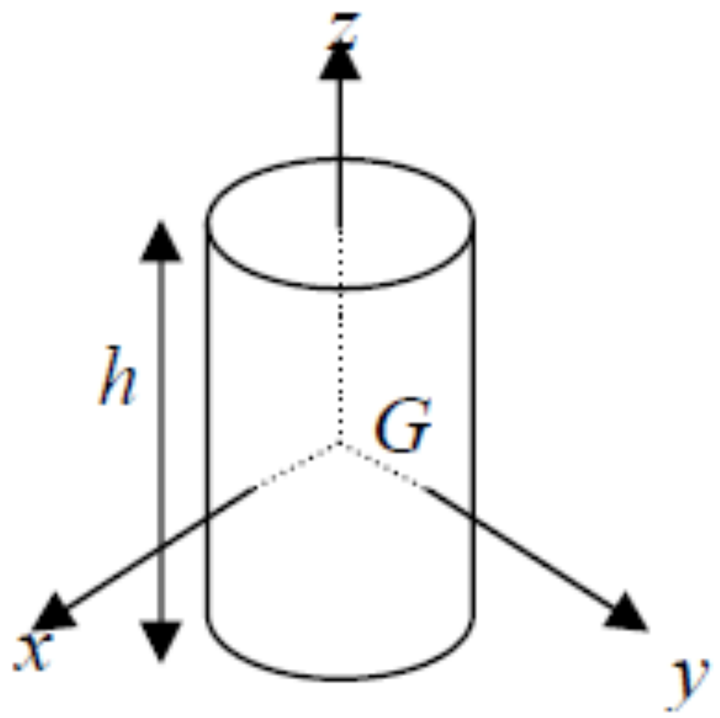
moment d'inertie par rapport à l'axe $(G, \overrightarrow{y}_S)$

$\boxed{J(G, \overrightarrow{y}_S)}$

moment d'inertie par rapport à l'axe $(G, \vec{z}_S)$

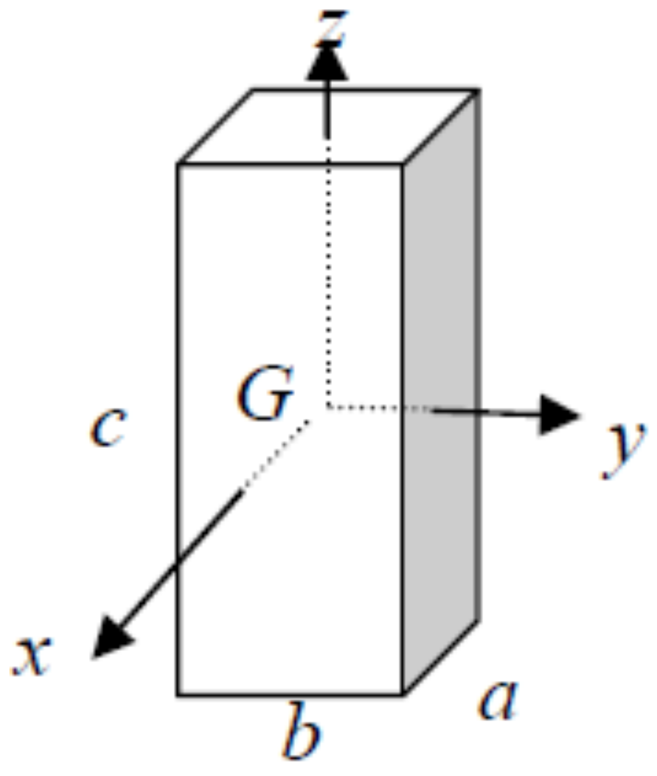
$\boxed{J(G, \vec{z}_S)}$

Cylindre de masse m hauteur h et rayon R



$$I(G,S)=\begin{bmatrix} m.\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m.\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m.\frac{R^2}{2} \end{bmatrix} \text{dans la base } \left(-,-,\vec{z}\right)$$

Parallélépipède de masse m de côtés a, b, c

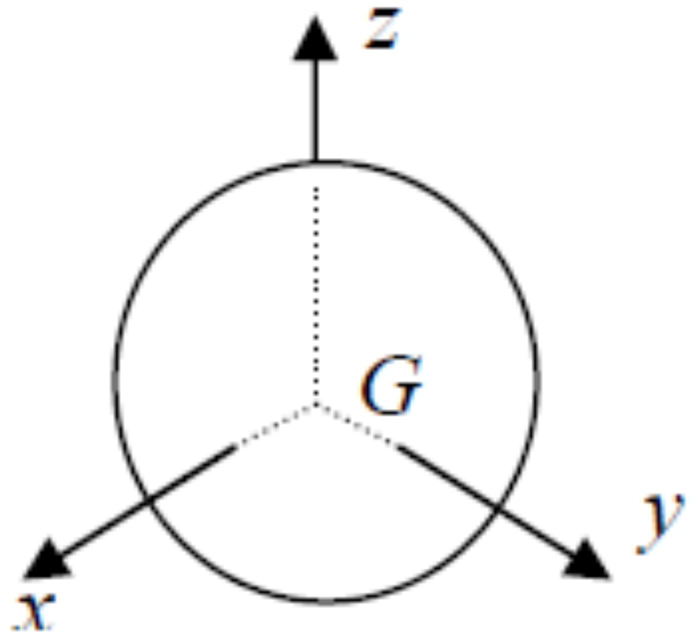


$$I(G,S)=\begin{bmatrix} \frac{m}{12}.\left(b^2+c^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}.\left(a^2+c^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}.\left(a^2+b^2\right) \end{bmatrix}$$

dans la base $\left(\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$

Je dois connaitre cela par coeur !

Sphère de masse m et de rayon R



$$I(G,S)=\begin{bmatrix} \frac{2}{5}.m.R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}.m.R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}.m.R^2 \end{bmatrix} \text{dans la base } \left(-,-,-\right)$$

5. Matrice d'inertie

Trois difficultés peuvent être rencontrées :

- la matrice d'inertie est demandée **en autre point que le centre d'inertie G** :

  Théorème de Huygens

- **la base d'expression de la matrice d'inertie n'est pas la base** B_S dite principale :

  On utilise les symétries pour retrouver B_S

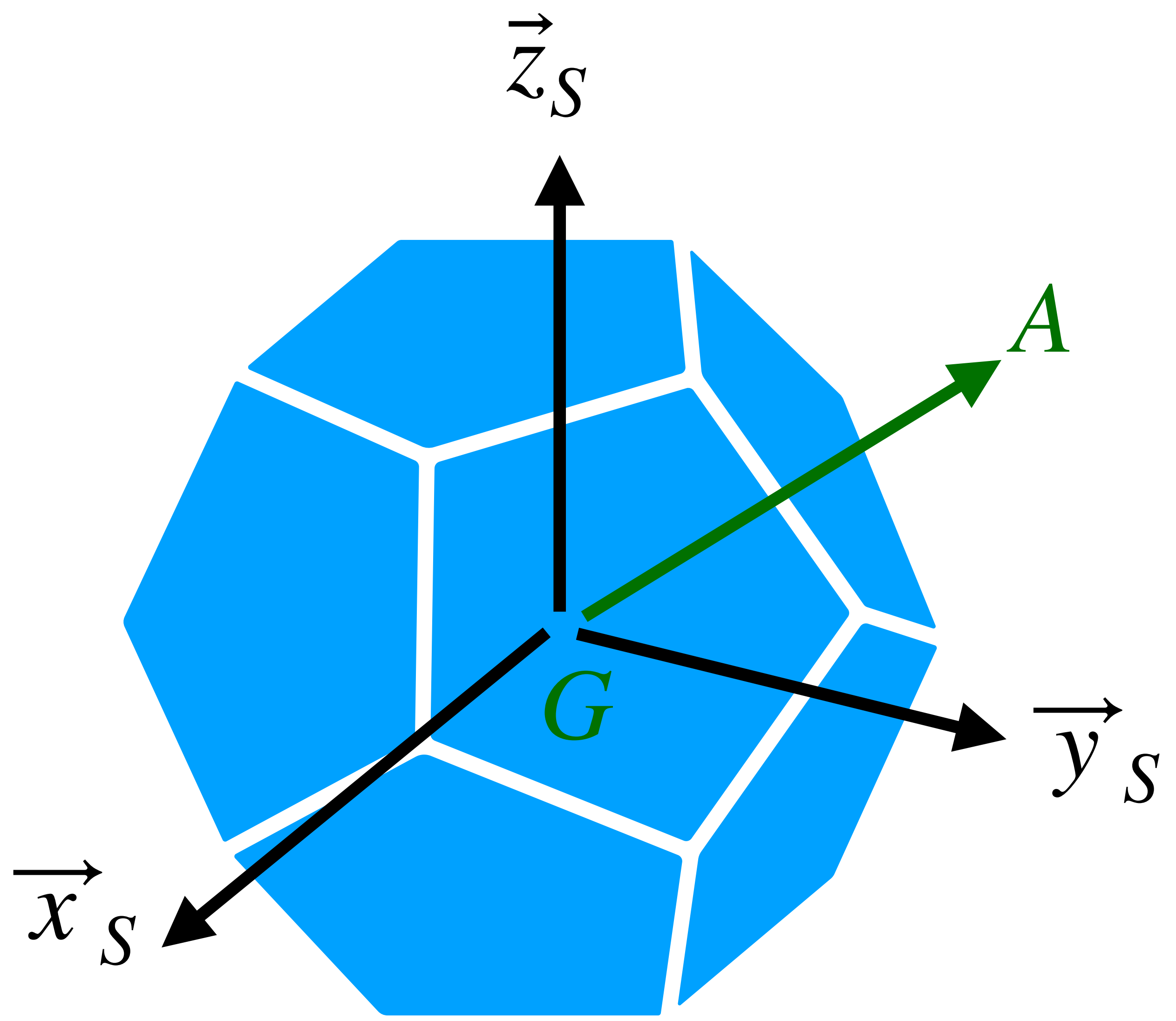
- on cherche la matrice d'inertie **d'un ensemble de solides** :

  Principe de superposition

5. Matrice d'inertie

Théorème de Huygens : matrice d'inertie en un point $\neq G$

$$I(A,S) = I(G,S) + \begin{bmatrix} m_S\,.\,(b^2+c^2) & -m_S\,.\,ab & -m_S\,.\,ac \\ -m_S\,.\,ab & m_S\,.\,(a^2+c^2) & -m_S\,.\,bc \\ -m_S\,.\,ac & -m_S\,.\,bc & m_S\,.\,(a^2+b^2) \end{bmatrix}_{B_S}$$



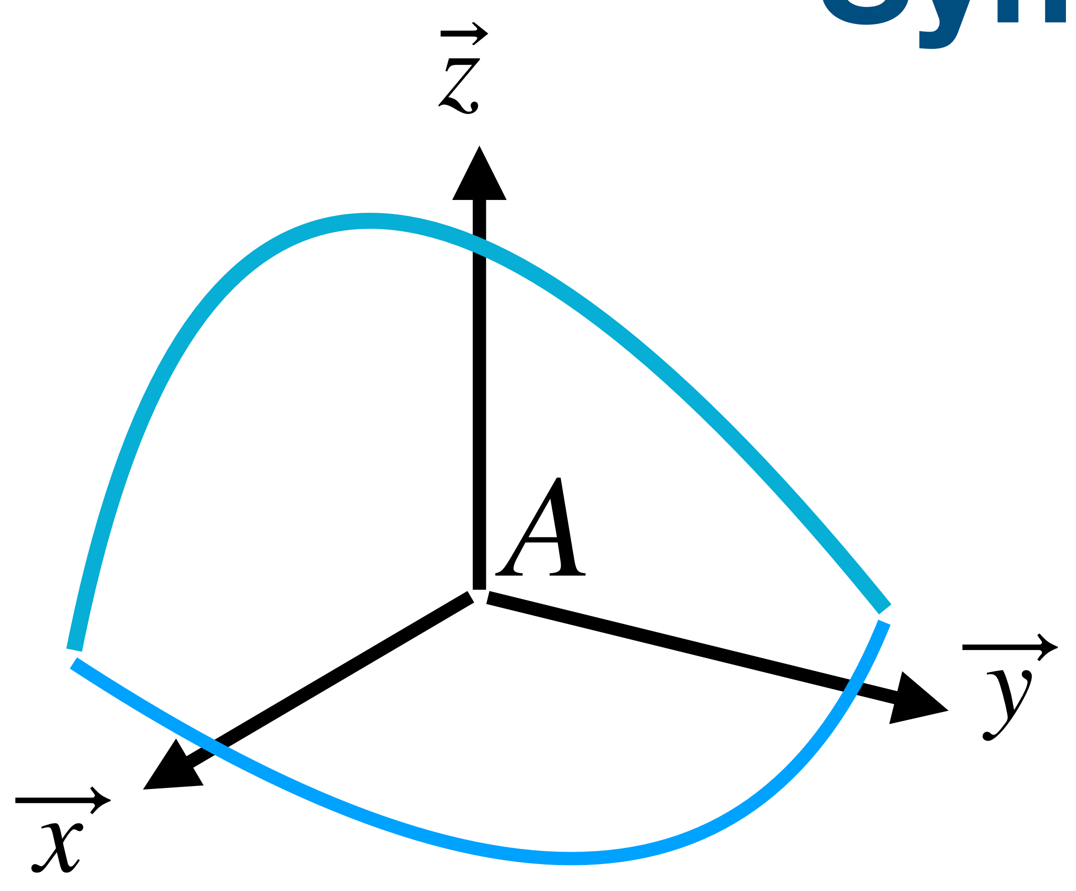
Vecteur « déplacement »

$$\overrightarrow{GA} = a\,.\,\vec{x}_S + b\,.\,\vec{y}_S + c\,.\,\vec{z}_S$$

F. BLASCHECK

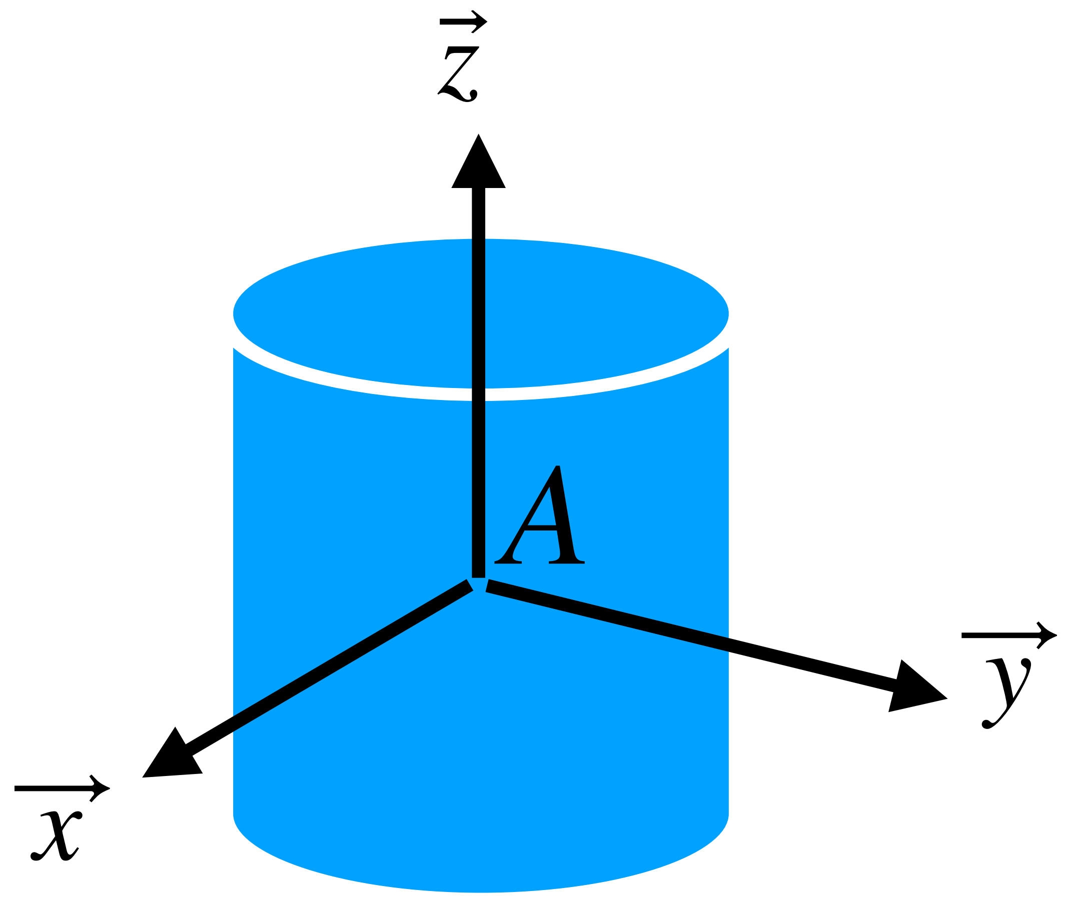
5. Matrice d'inertie

Symétries : matrice d'inertie dans une base $\neq B_S$



aucune symétrie

$$\boxed{I(A,S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_B}$$

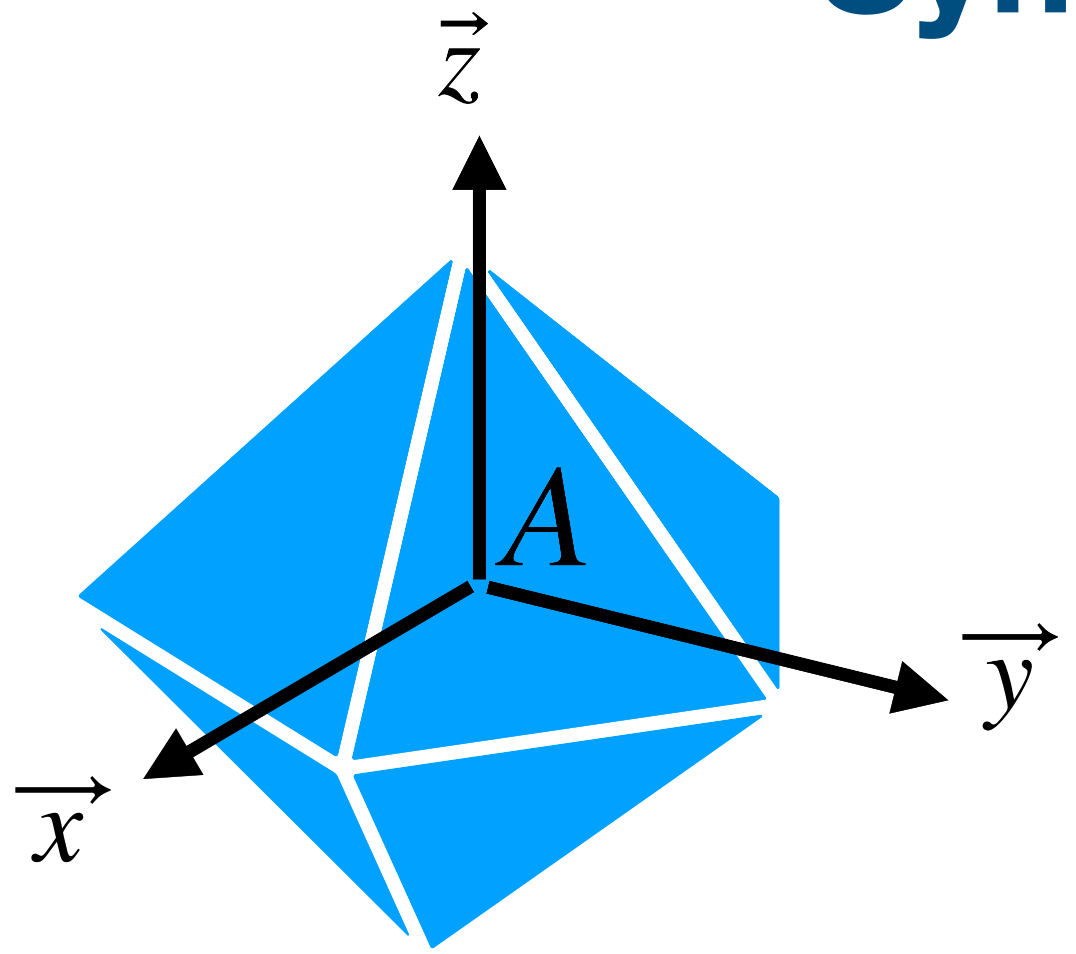


symétrie de révolution

$$\boxed{I(A,S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_B}$$

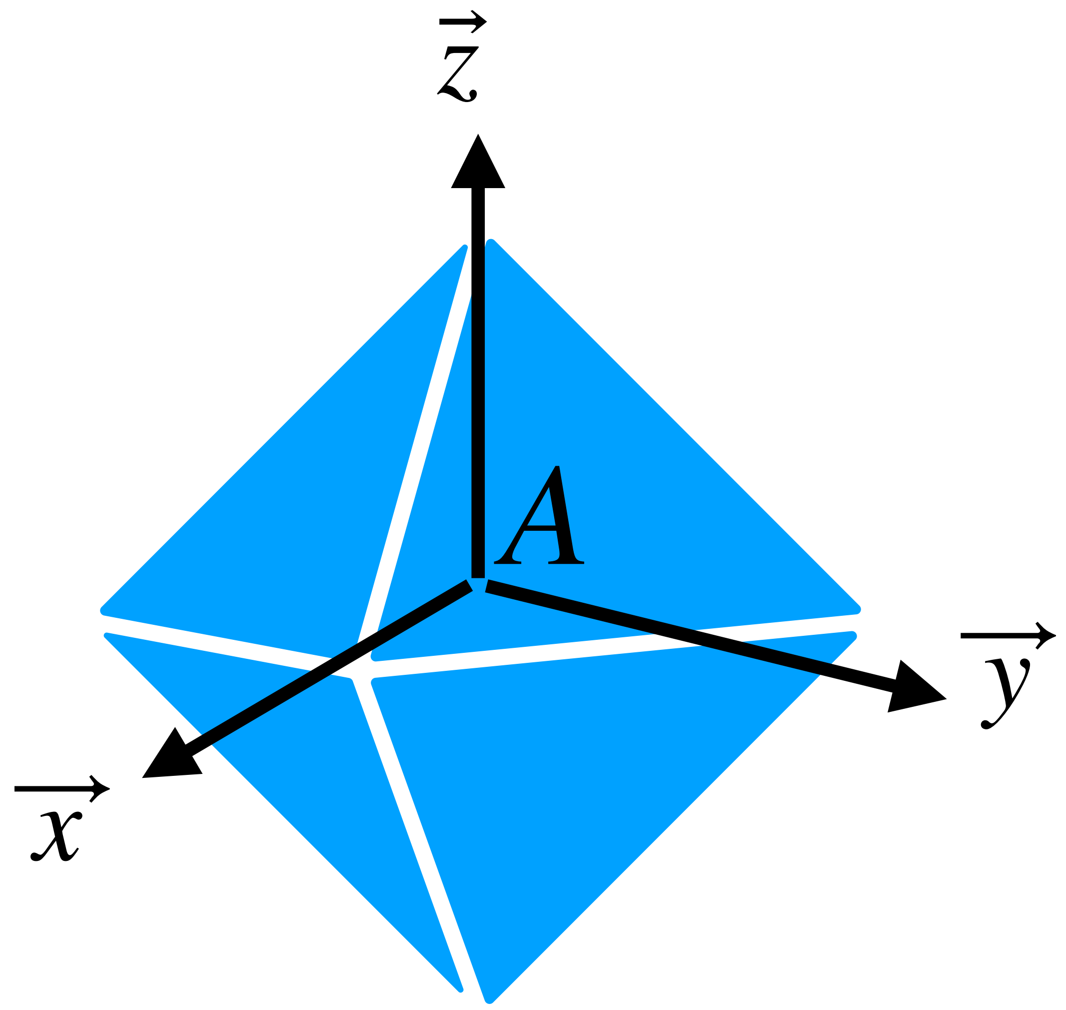
5. Matrice d'inertie

Symétries : matrice d'inertie dans une base $\neq B_S$



$(A, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$
plan de symétrie

$$I(A,S) = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_B$$



$(A, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{z})$
plan de symétrie

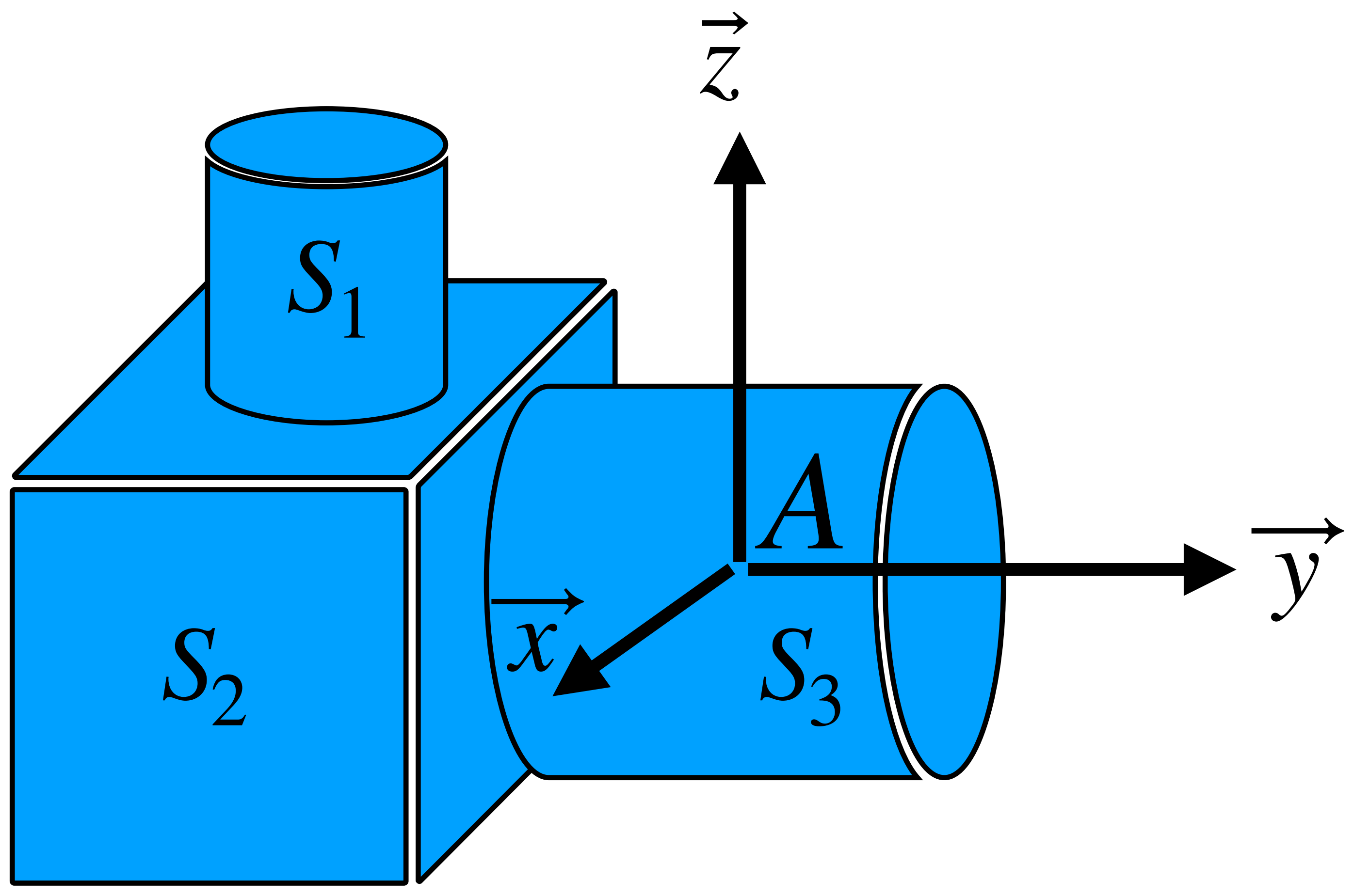
$$I(A,S) = \begin{bmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{bmatrix}_B$$

F. BLASCHECK

5. Matrice d'inertie

Principe de superposition : matrice d'inertie d'un ensemble de solides

Soit E un ensemble de i solides S_i . La matrice d'inertie en A de l'ensemble E est la somme des matrices d'inertie des i solides :



$$\boxed{I(A, E) = I(A, S_1) + I(A, S_2) + \ldots + I(A, S_n)}$$

Toutes les matrices exprimées au même point A et dans la même base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

6. Formules à retenir

$$\boxed{m_S = \rho \, . \, V}$$

m_S :masse du solide en Kg
ρ : masse volumique du matériau en $Kg \, . \, m^{-3}$
V : volume de matière en m^3

$$\boxed{m_E = m_1 + \ldots + m_n = \Sigma m_i}$$

m_E :masse de l'ensemble en Kg
n : nombre de solides
m_i : masse du solide i en Kg

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\Sigma[m_i \, . \, \overrightarrow{OG_i}]}{[\Sigma m_i]}}$$

G : centre d'inertie de l'ensemble des i solides
m_i : masse du solide i en Kg
G_i : centre d'inertie du solide i
O : un point quelconque de l'espace

$$I(G,S) = \begin{bmatrix} A = J(G, \overrightarrow{x}_S) & 0 & 0 \\ 0 & B = J(G, \overrightarrow{y}_S) & 0 \\ 0 & 0 & C = J(G, \overrightarrow{z}_S) \end{bmatrix}_{B_S}$$

$I(G,S)$: matrice d'inertie en G de S
A, B, C : moments d'inertie en $Kg \, . \, m^2$
B_S : base principale du solide

Je dois connaitre cela par coeur !

$$I(A,S) = I(G,S) + \begin{bmatrix} m_S \, . \, (b^2 + c^2) & -m_S \, . \, ab & -m_S \, . \, ac \\ -m_S \, . \, ab & m_S \, . \, (a^2 + c^2) & -m_S \, . \, bc \\ -m_S \, . \, ac & -m_S \, . \, bc & m_S \, . \, (a^2 + b^2) \end{bmatrix}_{B_S}$$

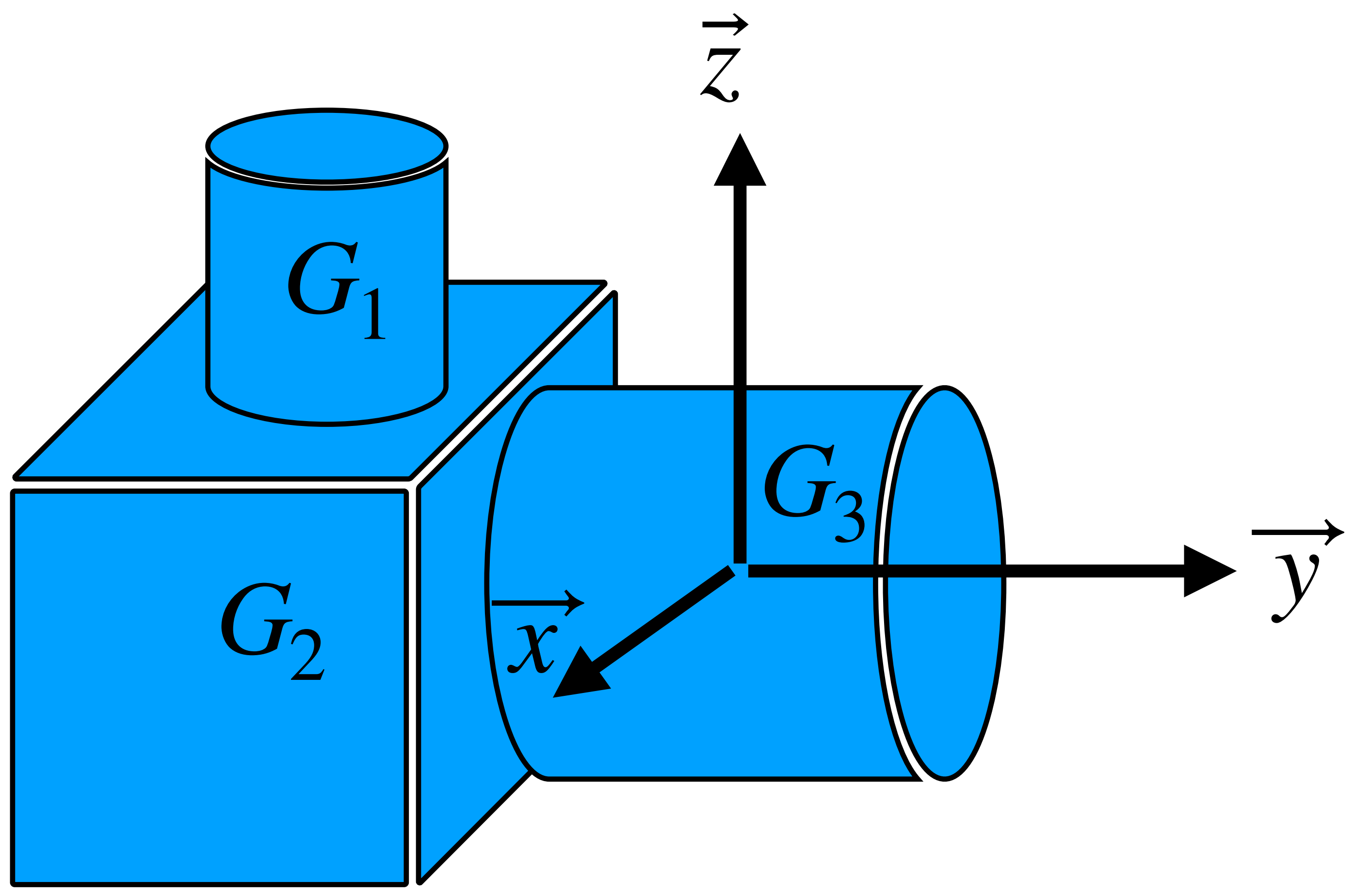
$I(G,S)$: matrice d'inertie en G de S
$I(A,S)$: matrice d'inertie en A de S
m_S : masse du solide S en Kg
a, b, c : coordonnées du vecteur « déplacement » $\overrightarrow{GA}$
B_S : base principale du solide

$$\boxed{I(A,E) = I(A,S_1) + I(A,S_2) + \ldots + I(A,S_n)}$$

Toutes les matrices exprimées au même point A et dans la même base $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$

F. BLASCHECK

7. Exercice de cours



Cylindre 1

$S_1 : R_1, h_1, m_1, G_1$

Cylindre 3

$S_3 : R_3, h_3, m_3, G_3$

Cube 2

$S_2 : a_2, m_2, G_2$

1. Par étude des symétries, déterminer la forme de la matrice d'inertie en G_3 de l'ensemble de solides E ci-contre.
2. Déterminer le vecteur $\overrightarrow{GG_3}$, G étant le centre d'inertie de E.
3. Déterminer le moment d'inertie de E autour de l'axe $(G_3, \overrightarrow{y})$.
4. Déterminer la matrice d'inertie en G_3 du solide S_1.
5. Déterminer la matrice d'inertie en G_3 du solide S_2.
6. En déduire l'expression de $I(G_3, E)$ dans la base $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \vec{z})$.

Je dois savoir refaire cela !