Exercice de cours :

① . $(G_3, \vec{y}, \vec{z})$ plan de symétrie $\Rightarrow$ $\boxed{I(G_3,E) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{bmatrix}_B}$

② . G est le barycentre de G_1, G_2, G_3.

$$\vec{G_3G} = \frac{m_1 \vec{G_3G_1} + m_2 \vec{G_3G_2} + m_3 \vec{G_3G_3}}{m_1+m_2+m_3} = \frac{m_1}{m_1+m_2+m_3}\left[\left(-\frac{h_3}{2}-\frac{a_2}{2}\right)\vec{y} + \left(\frac{a_2}{2}+\frac{h_1}{2}\right)\vec{z}\right]$$

$$+ \frac{m_2}{m_1+m_2+m_3}\left[\left(-\frac{h_3}{2}-\frac{a_2}{2}\right)\vec{y}\right].$$

donc

$$\boxed{\vec{G_3G} = \frac{1}{m_1+m_2+m_3} \cdot \left|\begin{array}{l} 0 \\ -\frac{m_1}{2}(h_3+a_2) - \frac{m_2}{2}(h_3+a_2) \\ \frac{m_1}{2}(h_1+a_2) \end{array}\right._B}$$

③ . Cylindre 3 : $J(G_3, \vec{y}) = m_3 \frac{R_3^2}{2}$.

. Cylindre 1 : $J(G_1, \vec{y}) = m_1 \left(\frac{R_1^2}{4} + \frac{h_1^2}{12}\right)$.

. Cube 2 : $J(G_2, \vec{y}) = m_2 \frac{a_2^2}{6}$.

d'après le cours.

. Pour ramener tout cela en G_3, on utilise le théorème de Huygens :

on ajoute : $m_1 \cdot \left(0 + \left(\frac{a_2}{2} + \frac{h_1}{2}\right)^2\right)$ pour le cylindre 1.

$m_2 (0 + 0)$ pour le cube 2.

$m_3 \cdot 0$ pour le cylindre 3.

Finalement :

$$\boxed{J(G_3, \vec{y})_E = m_3 \frac{R_3^2}{2} + m_2 \frac{a^2}{6} + m_1 \left(\frac{R_1^2}{4} + \frac{h_1^2}{12} + \frac{1}{4}(a_2+h_1)^2\right).}$$

c'est le terme B de la matrice de ①.

4. <u>Théorème de Huygens</u> !

$$I(G_3, S_1) = I(G_1, S_1) + m_1 \cdot \begin{bmatrix} \cdots \end{bmatrix} \quad \text{avec } \overrightarrow{G_3G_1} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}(a_2+h_3) \\ \frac{1}{2}(a_2+h_1) \end{vmatrix}_B$$

$$\boxed{I(G_3,S_1) = \begin{bmatrix} m_1\left(\frac{R_1^2}{4}+\frac{h_1^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m_1\left(\frac{R_1^2}{4}+\frac{h_1^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m_1\frac{R_1^2}{2} \end{bmatrix} + \frac{m_1}{4}\begin{bmatrix} (a_2+h_1)^2+(a_2+h_3)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (a_2+h_1)^2 & +(a_2+h_3)(a_2+h_1) \\ 0 & (a_2+h_3)(a_2+h_1) & (a_2+h_3)^2 \end{bmatrix}}$$

5. <u>Théorème de Huygens</u>:

$$I(G_3, S_2) = I(G_1, S_2) + m_2 \cdot \begin{bmatrix} \cdots \end{bmatrix} \quad \text{avec } \overrightarrow{G_3G_2} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}(a_2+h_3) \\ 0 \end{vmatrix}_B$$

$$\boxed{I(G_3,S_2) = \begin{bmatrix} m_2\frac{a^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & m_2\frac{a^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & m_2\frac{a^2}{6} \end{bmatrix} + \frac{m_2}{4} \cdot \begin{bmatrix} (a_2+h_3)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{(a_2+h_3)^2}\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a_2+h_3)^2 \end{bmatrix}_B}$$

6. On applique le principe de superposition: $\underline{I(G_3,E) = I(G_3,S_3) + I(G_3,S_1) + I(G_3,S_2)}$

$$A = m_3\left(\frac{R_3^2}{4}+\frac{h_3^2}{12}\right) + m_1\left(\frac{R_1^2}{4}+\frac{h_1^2}{12}\right) + \frac{m_1}{4}\left[(a_2+h_1)^2+(a_2+h_3)^2\right] + m_2\frac{a^2}{6} + \frac{m_2}{4}(a_2+h_3)^2$$

$$B = m_3\left(\frac{R_3^2}{4}+\frac{h_3^2}{12}\right) + m_1\left(\frac{R_1^2}{4}+\frac{h_1^2}{12}\right) + \frac{m_1}{4}(a_2+h_1)^2 + m_2\frac{a^2}{6}.$$

à inverser

$$C = m_3\frac{R_3^2}{2} + m_1\frac{R_1^2}{2} + m_2\frac{a^2}{6} + \frac{m_2}{4}(a_2+h_3)^2 + \frac{m_1}{4}(a_2+h_3)^2.$$

$$-D = \frac{m_1}{4}\cdot(a_2+h_3)(a_2+h_1).$$