Principe fondamental de la dynamique

Chapitre 2 : théorèmes généraux

F. BLASCHECK

UNE VISION D'AVENIR DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE
Lycée Eiffel DIJON

Chapitre 2 : théorèmes généraux

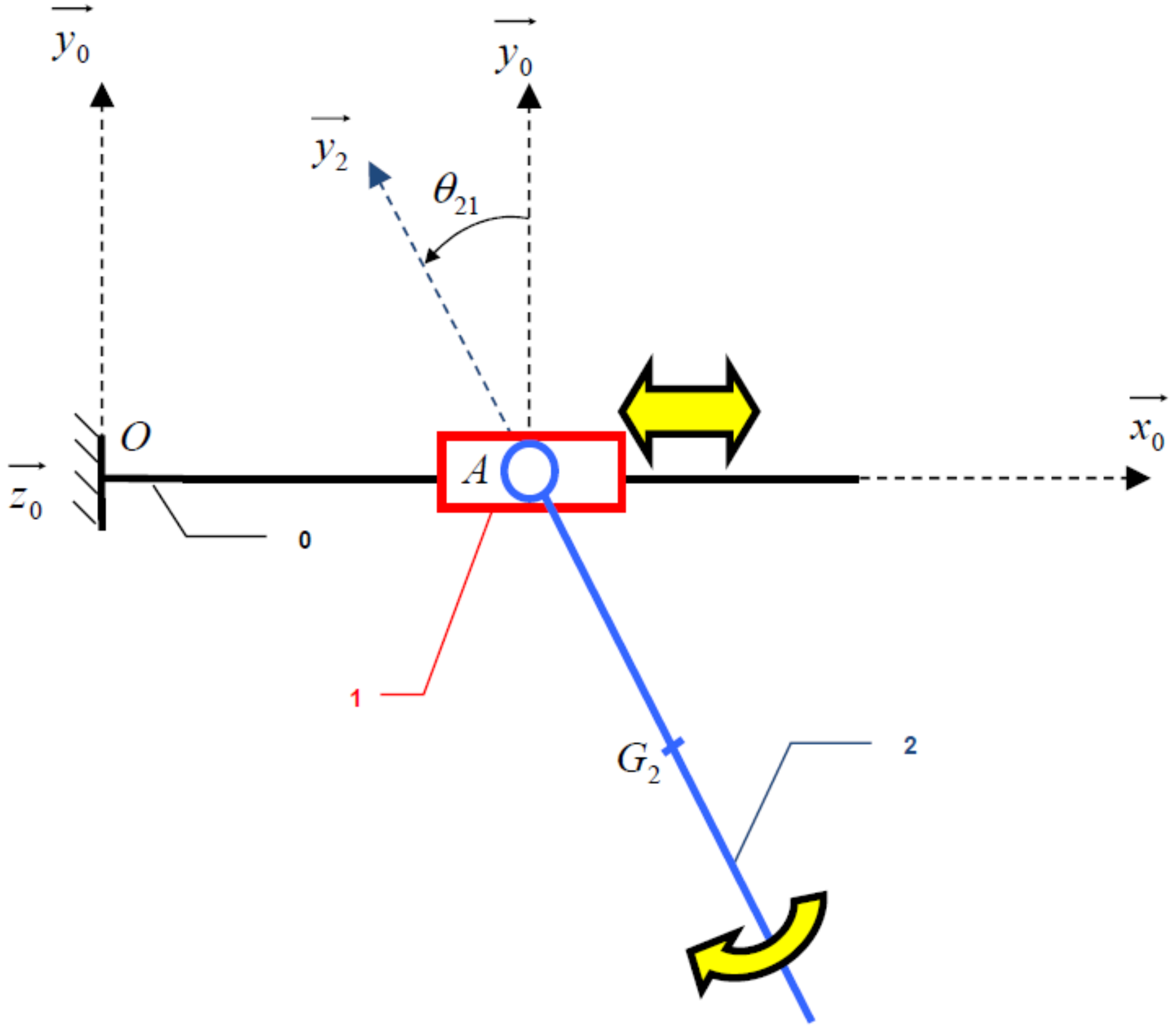
F. BLASCHECK

1. Hypothèses de travail

Lors de nos études dynamiques, les solides étudiés seront considérés **indéformables et à masse conservative.**

Les vitesses rencontrées seront considérés **très faibles devant la vitesse de la lumière** dans le vide.

Le référentiel d'étude sera **toujours galiléen.**



Porte container sur câbles : problème dynamique d'oscillations fonction de la translation et de l'inertie du container

2. Calcul de la résultante dynamique

La résultante dynamique d'un solide S par rapport au référentiel galiléen R_0 est définie par l'expression suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{R}_d(S/R_0) = m_S \,.\, \overrightarrow{a}(G \epsilon S/R_0)}$$

S : solide
m_S : masse du solide en Kg
$\overrightarrow{a}$: vecteur accélération
G : centre d'inertie du solide
R_0 : référentiel Galiléen

Pour **un ensemble** E **de solides** S_i, il suffit d'appliquer **le principe de superposition :**

$$\boxed{\overrightarrow{R}_d(E/R_0) = \Sigma[m_i \,.\, \overrightarrow{a}(G_i \epsilon S_i/R_0)]}$$

S_i : solide i
m_i : masse du solide i en Kg
$\overrightarrow{a}$: vecteur accélération
G_i : centre d'inertie du solide i
R_0 : référentiel Galiléen

3. Théorème de la résultante dynamique

Enoncé du TRD :

La résultante dynamique d'un solide *(d'un ensemble de solides)* **est égale à la somme des résultantes** des efforts extérieurs appliqués sur le solide *(l'ensemble de solides)*.

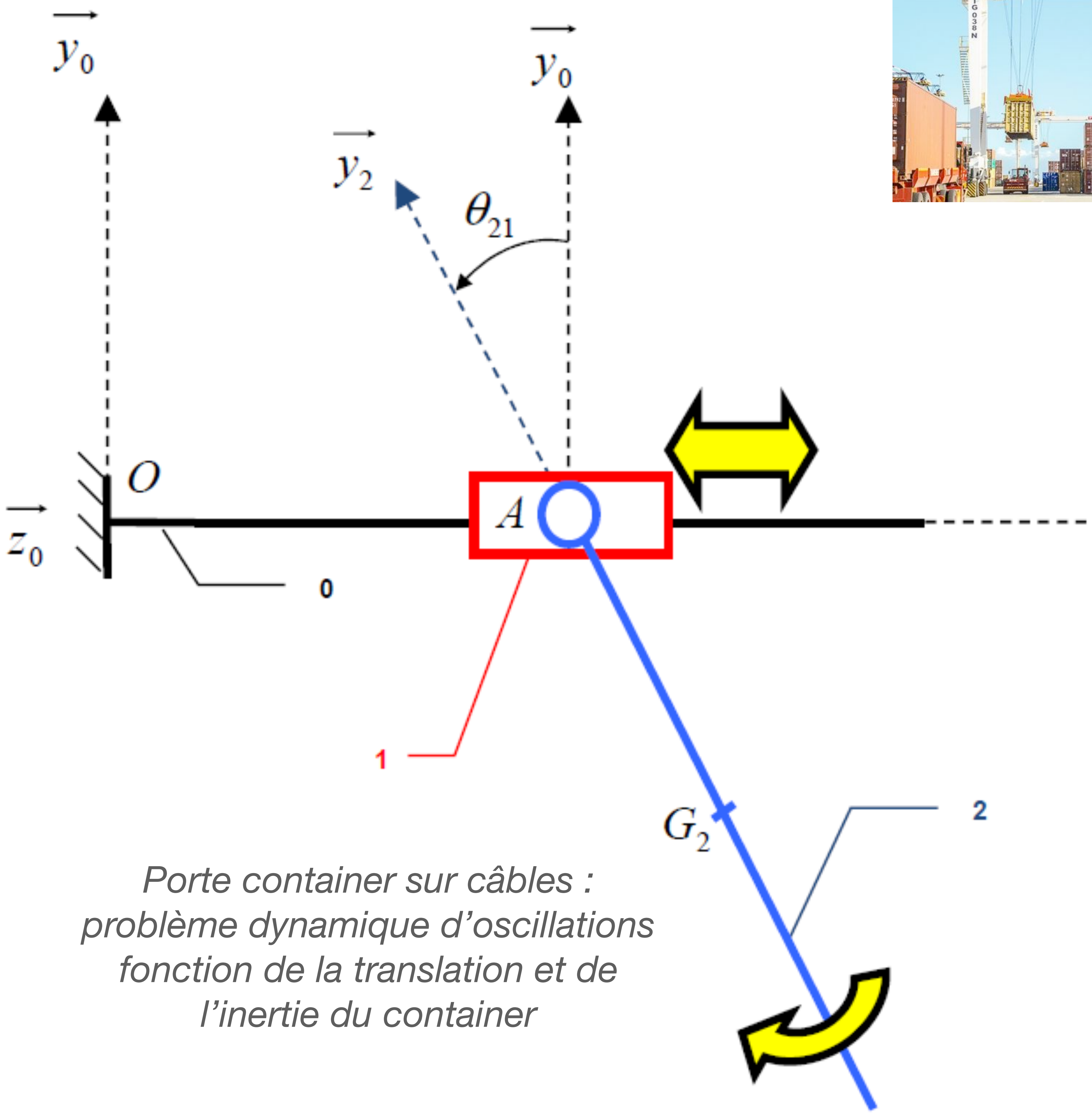
TRD à un solide

$$\boxed{\overrightarrow{R}_d(S/R_0) = m_S\,.\,\overrightarrow{a}(G\epsilon S/R_0) = \Sigma[\overrightarrow{R}(\bar{S} \rightarrow S)]}$$

TRD à un ensemble de solides

$$\boxed{\overrightarrow{R}_d(E/R_0) = \Sigma[m_i\,.\,\overrightarrow{a}(G_i\epsilon S_i/R_0)] = \Sigma[\overrightarrow{R}(\bar{E} \rightarrow E)]}$$

4. Exercice de cours



Porte container sur câbles : problème dynamique d'oscillations fonction de la translation et de l'inertie du container

__Données :__

$$I(G_2,2)=\begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{(x2,y2,z2)}$$

$$(\vec{y}_0,\vec{y}_2)=(\vec{x}_0,\vec{x}_0)=\theta_{21}$$

$$\overrightarrow{OA}=x(t).\vec{x}_0$$

$$\overrightarrow{AG_2}=-l_2.\vec{y}_2$$

1. Tracer la figure angulaire plane pour θ_{21}.
2. Tracer le graphe de liaisons du mécanisme augmenté des efforts extérieurs.
3. Déterminer $\vec{V}(G_2 \in 2/0)$.
4. Calculer la résultante dynamique de $2/0$.
5. Isoler 2 et faire le BAME.
6. Par application du TRD, déterminer la résultante $\vec{R}(1 \rightarrow 2)$ exercée dans la pivot en A.

F. BLASCHECK

1. Tracer la figure angulaire plane pour θ_{21}.

2. Tracer le graphe de liaisons du mécanisme augmenté des efforts extérieurs.

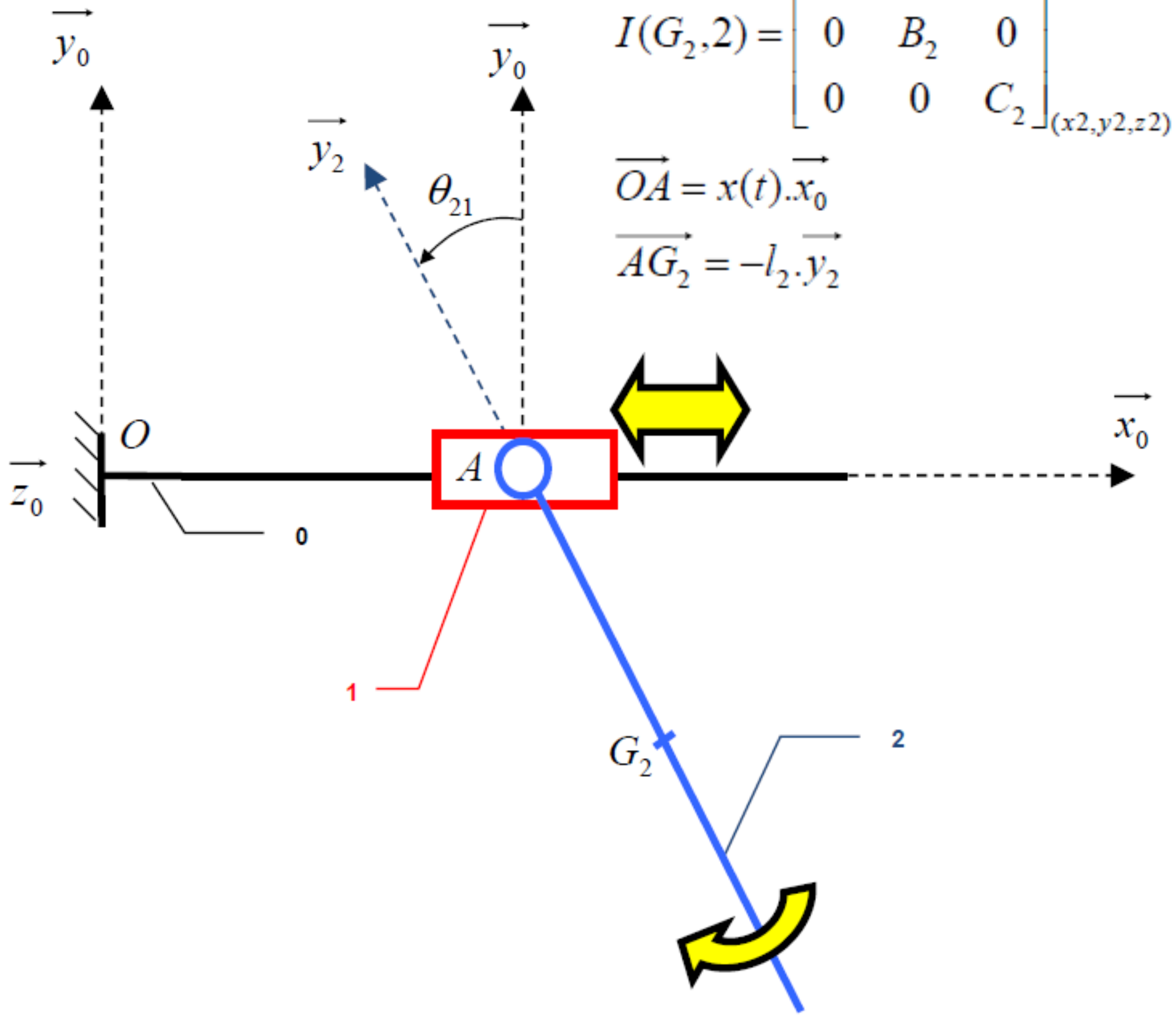
3. Déterminer $\overrightarrow{V}(G_2 \in 2/0)$.

Données :

$$I(G_2,2)=\begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{(x2,y2,z2)}$$

$$\overrightarrow{OA}=x(t).\overrightarrow{x_0}$$

$$\overrightarrow{AG_2}=-l_2.\overrightarrow{y_2}$$



Je dois savoir refaire cela !

F. BLASCHECK

4. Calculer la résultante dynamique de $2/0$.

<u>Données :</u>

$$I(G_2,2)=\begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{(x2,y2,z2)}$$

$$\overrightarrow{OA}=x(t).\overrightarrow{x_0}$$

$$\overrightarrow{AG_2}=-l_2.\overrightarrow{y_2}$$

5. Isoler 2 et faire le BAME.

6. Par application du TRD, déterminer la résultante $\overrightarrow{R}(1 \rightarrow 2)$ exercée dans la pivot en A.

Je dois savoir refaire cela !

F. BLASCHECK

UNE VISION D'AVENIR DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE
Lycée Eiffel
DIJON

5. Calcul du moment dynamique

Le moment dynamique d'un solide S par rapport au référentiel galiléen R_0 est défini par l'expression suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{\delta}_d(A, S/R_0) = \frac{d}{dt}[I(A,S)\,.\,\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)]_{R_0}}$$

$I(A,S)$: matrice d'inertie en A du solide S
$\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$: vecteur rotation du solide S par rapport à R_0
$\overrightarrow{\delta}_d$: moment dynamique

Il est exprimé en un point A qui doit être :

- **le centre d'inertie G ;**

OU

- **un point fixe dans le référentiel tel que $\overrightarrow{V}(A \in S/R_0) = \overrightarrow{0}$.**

5. Calcul du moment dynamique

Le moment dynamique d'un solide S est la dérivée par rapport au temps et par rapport à R_0 du moment cinétique *(comme en physique)*.

$$\overrightarrow{\delta}_d(A, S/R_0) = \frac{d}{dt}[\underbrace{I(A,S)\,.\,\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)}_{\overrightarrow{\sigma}(A,S/R_0)\ :\ \text{moment cinétique en } A}]_{R_0}$$

$A = G$ **OU** $\overrightarrow{V}(A \in S/R_0) = \overrightarrow{0}$

Pour **un ensemble** E **de solides** S_i, il suffit d'appliquer **le principe de superposition :**

$$\boxed{\overrightarrow{\delta}_d(A, E/R_0) = \Sigma[\overrightarrow{\delta}_d(A, S_i/R_0)]}$$

Tous exprimés au même point A

6. Torseur dynamique

Le moment dynamique et la résultante dynamique d'un solide *(d'un ensemble de solides)* forment les deux éléments **du torseur dynamique du solide** S *(de l'ensemble de solides)* par rapport au référentiel R_0.

$$\boxed{\{\mathscr{D}(S/R_0)\}_A = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R}_d(S/R_0) \\ \overrightarrow{\delta}_d(A, S/R_0) \end{matrix} \right\}}$$

Torseur dynamique en A

Comme tous les torseurs **la résultante est invariante et le moment est déplaçable** par la formule classique *(le babar…)* :

$$\boxed{\overrightarrow{\delta}_d(B, E/R_0) = \overrightarrow{\delta}_d(A, E/R_0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_d}(A, S/R_0)}$$

7. Théorème du moment dynamique

Enoncé du TMD au point A :

Le moment dynamique en A d'un solide *(d'un ensemble de solides)* **est égale à la somme des moments en A** des efforts extérieurs appliqués sur le solide *(l'ensemble de solides)*.

TMD à un solide $\boxed{\overrightarrow{\delta}_d(A, S/R_0) = \Sigma[\overrightarrow{M}(A, \bar{S} \rightarrow S)]}$

TMD à un ensemble de solides $\boxed{\overrightarrow{\delta}_d(A, E/R_0) = \Sigma[\overrightarrow{M}(A, \bar{E} \rightarrow E)]}$

8. Exercice de cours

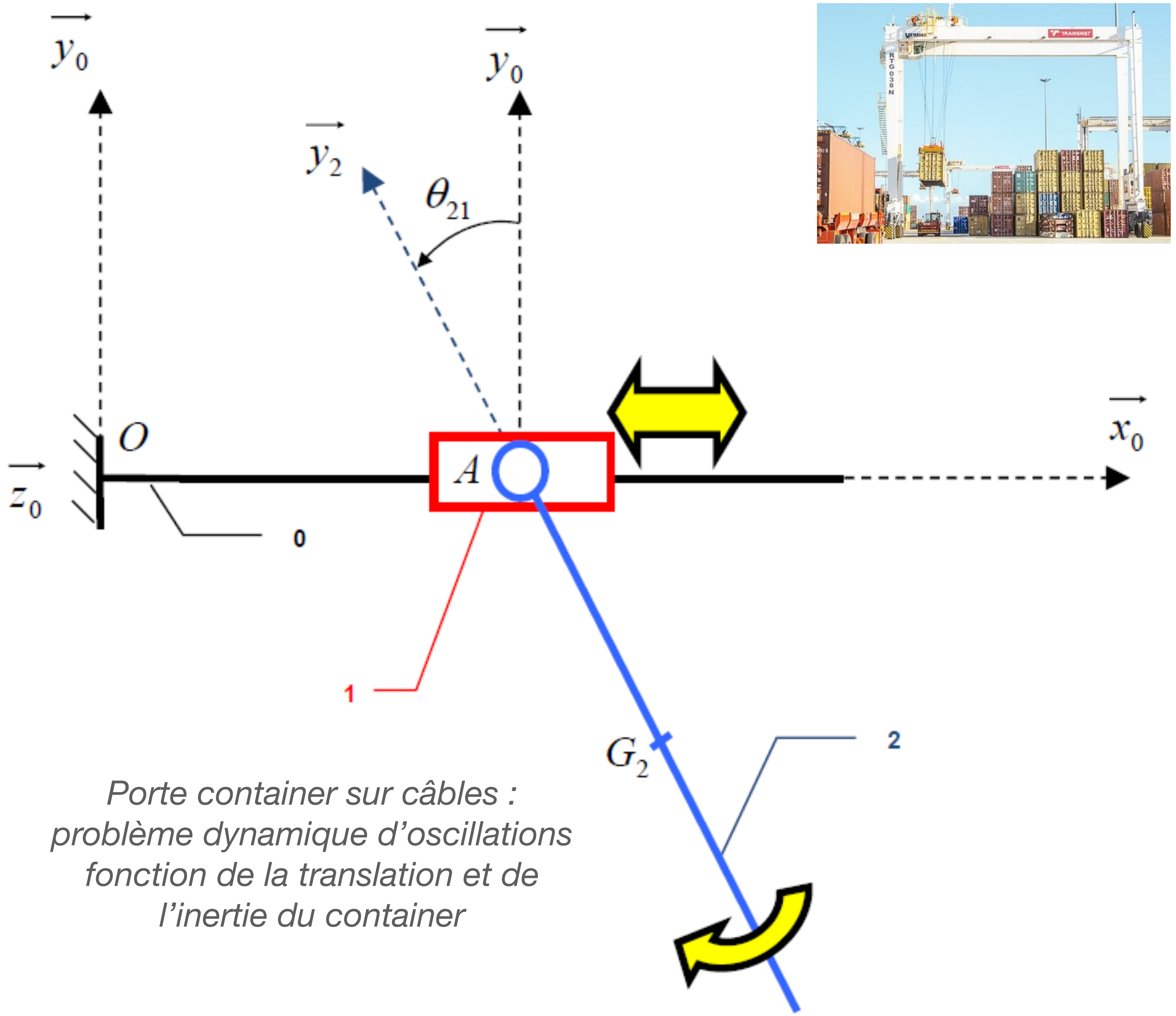
Données :

$$I(G_2,2)=\begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{(x2,y2,z2)}$$

$$(\vec{y_0},\vec{y_2})=(\vec{x_0},\vec{x_0})=\theta_{21}$$

$$\overrightarrow{OA}=x(t).\vec{x_0}$$

$$\overrightarrow{AG_2}=-l_2.\vec{y_2}$$



Porte container sur câbles : problème dynamique d'oscillations fonction de la translation et de l'inertie du container

1. Déterminer le moment cinétique en G_2 de $2/0$.
2. Calculer la coordonnée du moment dynamique $\overrightarrow{\delta_d}(G_2,2/0)$ sur $\vec{z}_0$.
3. Calculer la coordonnée du moment dynamique $\overrightarrow{\delta_d}(A,2/0)$ sur $\vec{z}_0$.
4. Isoler 2 et faire le BAME.
5. Par application du TMD en A, déterminer l'équation du mouvement de $2/0$ traduisant ses oscillations.

1. Déterminer le moment cinétique en G_2 de $2/0$.

<u>Données :</u>

$$I(G_2,2)=\begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{(x2,y2,z2)}$$

$$\overrightarrow{OA}=x(t).\overrightarrow{x_0}$$

$$\overrightarrow{AG_2}=-l_2.\overrightarrow{y_2}$$

2. Calculer la coordonnée du moment dynamique $\overrightarrow{\delta_d}(G_2,2/0)$ sur $\vec{z}_0$.

Je dois savoir refaire cela !

3. Calculer la coordonnée du moment dynamique $\overrightarrow{\delta_d}(A,2/0)$ sur $\vec{z}_0$.

Données :

$$I(G_2,2)=\begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{(x2,y2,z2)}$$

$$\overrightarrow{OA}=x(t).\overrightarrow{x_0}$$

$$\overrightarrow{AG_2}=-l_2.\overrightarrow{y_2}$$

4. Isoler 2 et faire le BAME.

Je dois savoir refaire cela !

5. Par application du TMD en A, déterminer l'équation du mouvement de $2/0$ traduisant ses oscillations.

<u>Données :</u>

$$I(G_2,2)=\begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{(x2,y2,z2)}$$

$$\overrightarrow{OA}=x(t).\overrightarrow{x_0}$$

$$\overrightarrow{AG_2}=-l_2.\overrightarrow{y_2}$$

Je dois savoir refaire cela !

F. BLASCHECK

9. Formules à retenir

Résultante dynamique :

$$\boxed{\overrightarrow{R}_d(S/R_0) = m_S \,.\, \overrightarrow{a}(G\epsilon S/R_0)}$$

$$\boxed{\overrightarrow{R}_d(E/R_0) = \Sigma[m_i \,.\, \overrightarrow{a}(G_i\epsilon S_i/R_0)]}$$

S : solide
m_S : masse du solide en Kg
$\overrightarrow{a}$: vecteur accélération
G : centre d'inertie du solide
R_0 : référentiel Galiléen

Théorème de la résultante dynamique :

$$\boxed{\overrightarrow{R}_d(S/R_0) = \Sigma[\overrightarrow{R}(\bar{S} \rightarrow S)]}$$

TRD à un solide

Moment dynamique :

$$\boxed{\overrightarrow{\delta}_d(A, S/R_0) = \frac{d}{dt}[\underbrace{I(A,S) \,.\, \overrightarrow{\Omega}(S/R_0)}_{\overrightarrow{\sigma}(A,S/R_0)}]_{R_0}}$$

$A = G$ **OU** $\overrightarrow{V}(A \in S/R_0) = \overrightarrow{0}$

$$\boxed{\overrightarrow{\delta}_d(A, E/R_0) = \Sigma[\overrightarrow{\delta}_d(A, S_i/R_0)]}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\delta}_d(B, E/R_0) = \overrightarrow{\delta}_d(A, E/R_0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_d}(A, S/R_0)}$$

$I(A,S)$: matrice d'inertie en A du solide S
$\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$: vecteur rotation du solide S par rapport à R_0
$\overrightarrow{\delta}_d$: moment dynamique
$\overrightarrow{\sigma}$: moment cinétique

Je dois connaitre cela par coeur !

Théorème du moment dynamique :

$$\boxed{\overrightarrow{\delta}_d(A, S/R_0) = \Sigma[\overrightarrow{M}(A, \bar{S} \rightarrow S)]}$$

TMD en A à un solide

BLASCHECK