



Mobilité douce en ville

*Prépa TSI
TIPE 2022-2023*

Introduction

- *Systeme*





Introduction

Problématique

Comment prévoir le comportement dynamique d'une passerelle ?

Objectifs

- I. Modélisation analytique
- II. Simulation numérique
- III. Comparaison



Plan

I. Détermination de constantes utiles

II. Visualisation sur inventor

- Étude statique
- Réaction de la structure à différentes fréquences

III. Modélisation analytique

- Premières simplifications
- Amélioration de la modélisation

IV. Modélisation numérique

V. Comparaison des résultats



Détermination de constantes utiles

Raideur de l'acier : 3 000 000 000 N/m

Raideur équivalente de la structure : 299 875 000 N/m

Masse de la structure : 136 803 kg

Pulsation propre de la structure : 46,82 rad/s

Fréquence des pas d'une marche de santé : 1,66 Hz

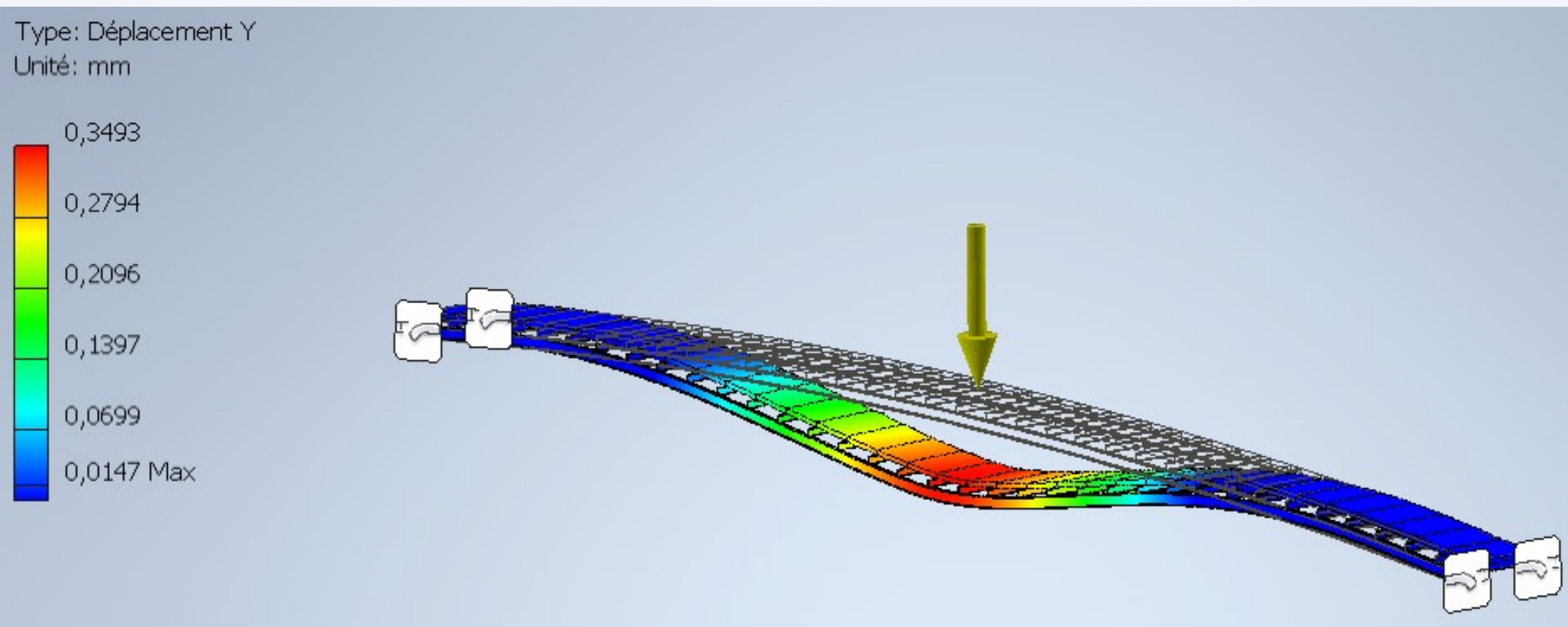
Facteur de qualité de la structure : 2,6

Coefficient d'amortissement de la structure : 2 463 455

Visualisation sur inventor

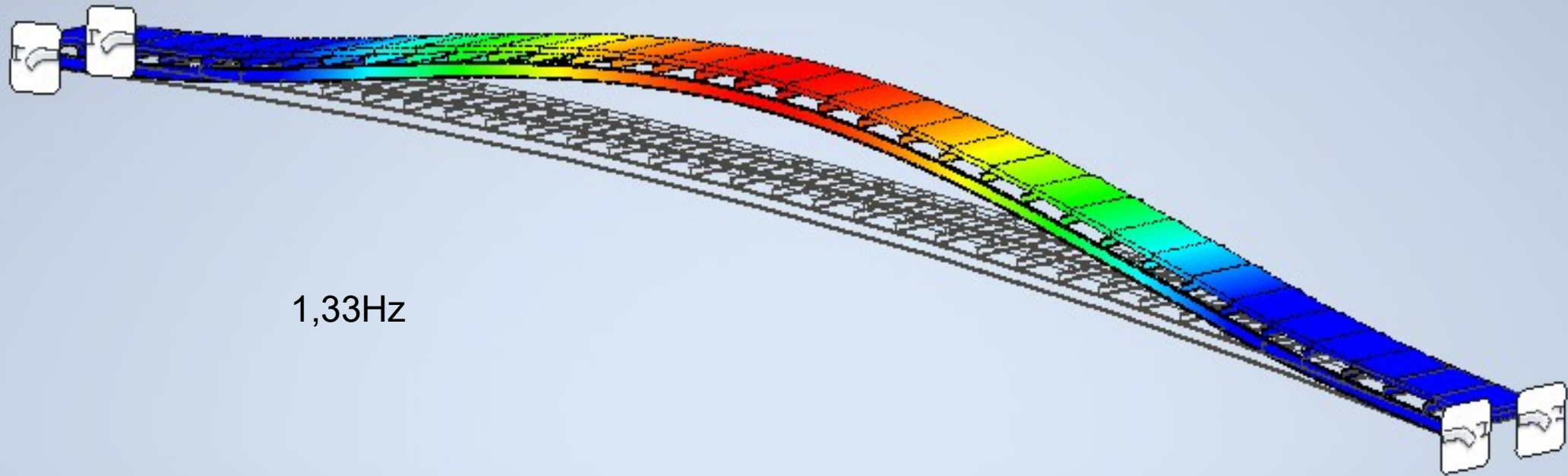
Analyse statique :

Force considérée : une personne de 74 kg



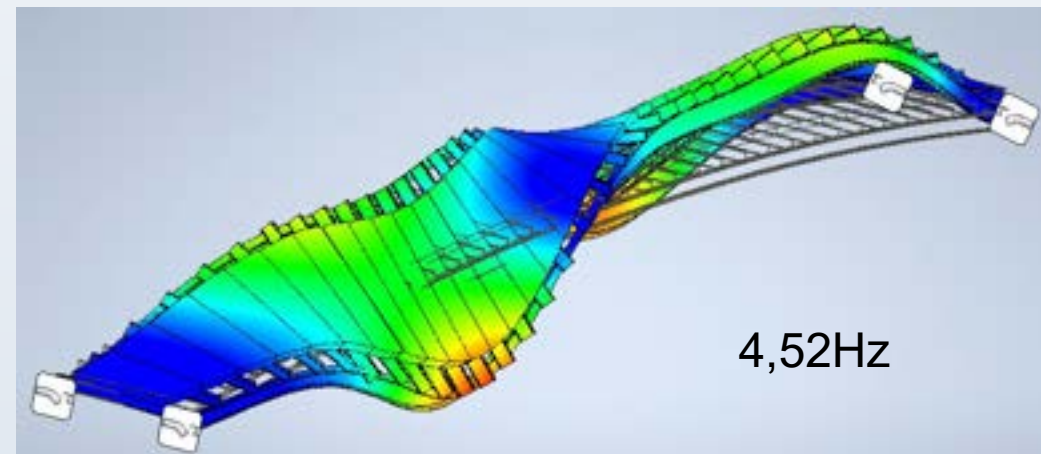
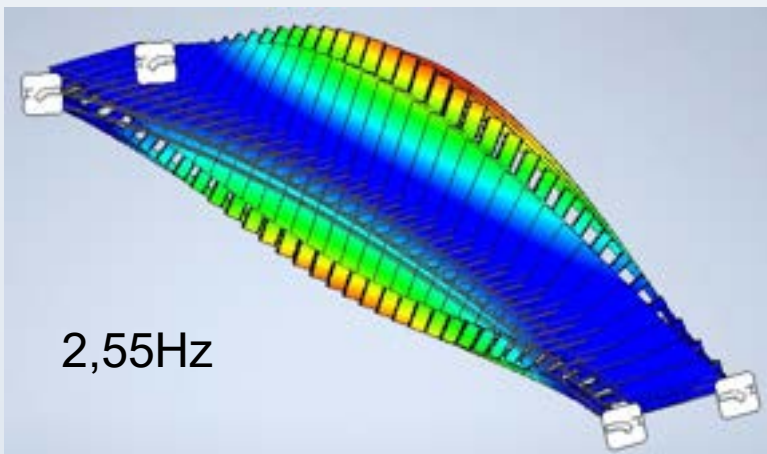
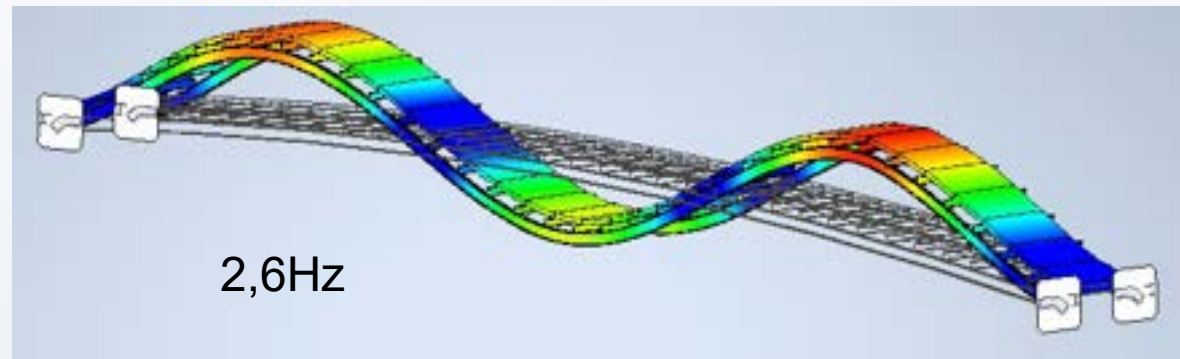
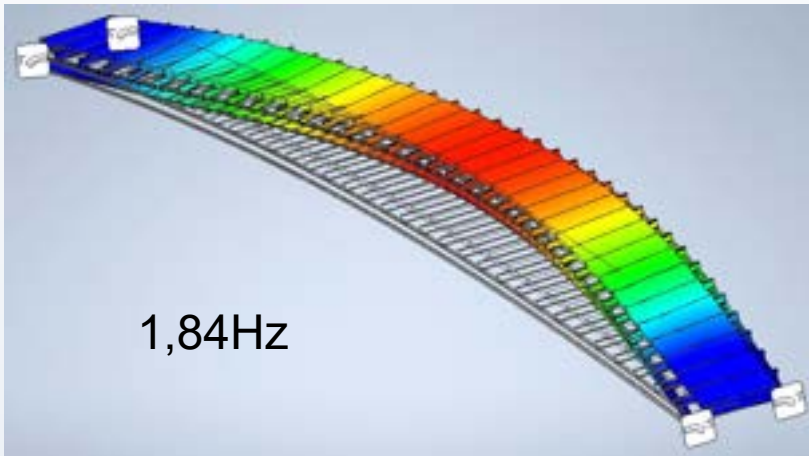
Visualisation sur inventor

Analyse modale :
Cas d'une marche de santé



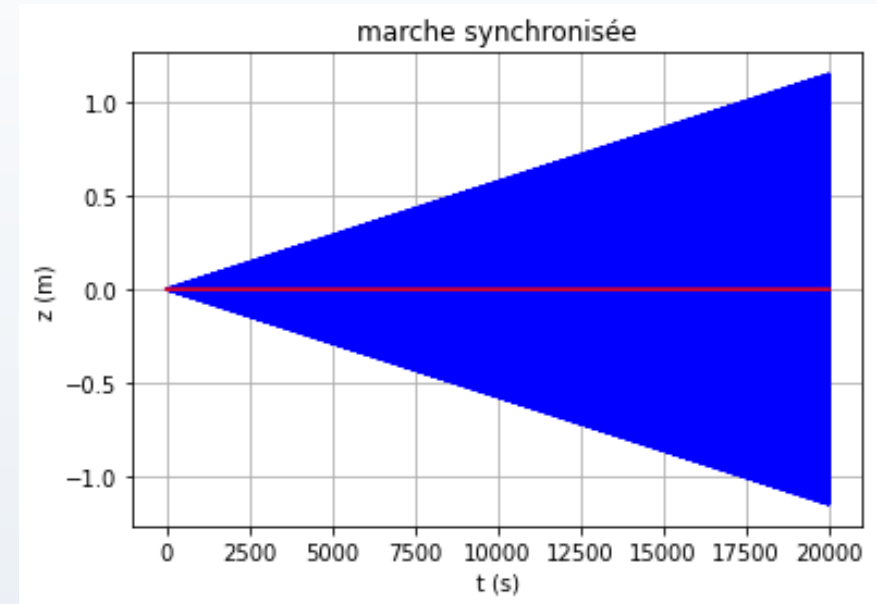
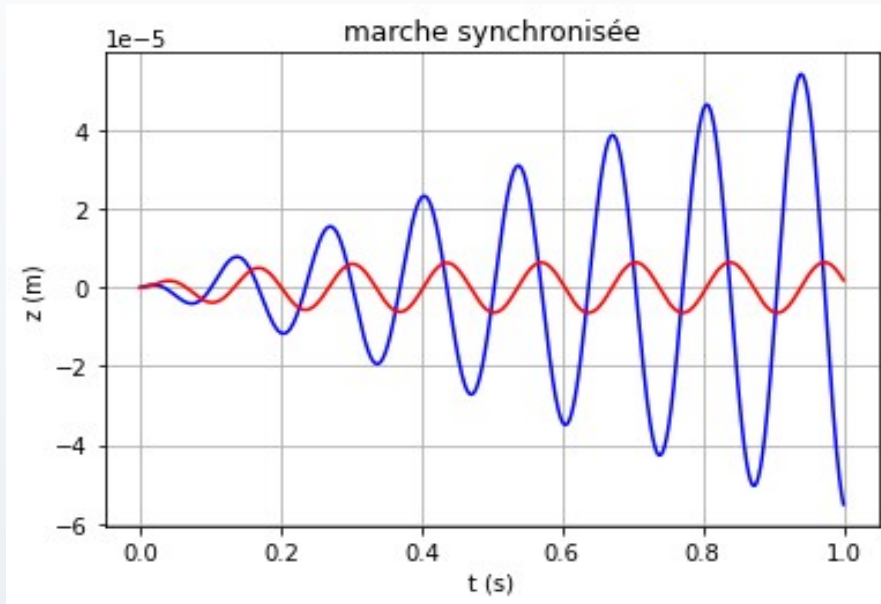
Visualisation sur inventor

Analyse modale :
Autres phénomènes intéressants



Modélisation analytique

Marche à la fréquence propre de la passerelle : $f = 7,45$ Hz



$$\blacksquare z(t) = \frac{g}{\omega_0^2} \cos(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2M\omega_0} t \sin(\omega_0 t) - \frac{g}{\omega_0^2}$$

$$\blacksquare z(t) = \left(\frac{g}{\omega_0^2} \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} \left(\frac{g}{2Q\omega_0} - \frac{QF_0}{M\omega_0} \right) \sin(\omega t) \right) e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} + \frac{QF_0}{M\omega_0^2} \sin(\omega_0 t) - \frac{g}{\omega_0^2}$$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

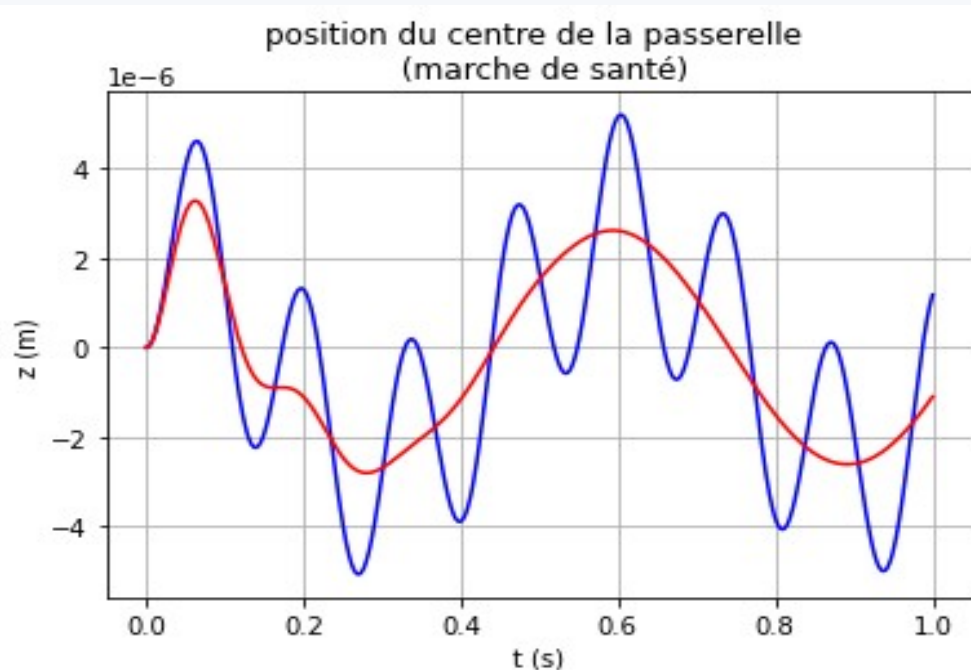
Modélisation analytique

Marche de santé de fréquence : $f = 1,66 \text{ Hz}$

$$\omega = \omega_1 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

$$A = \frac{F_0}{M(\omega_1^2 - \omega_0^2) \left(1 - \frac{\omega_0^2 \omega_1^2}{Q^2(\omega_1^2 - \omega_0^2)^2}\right)}$$

$$B = -\frac{F_0 \omega_0 \omega_1}{QM(\omega_1^2 - \omega_0^2)^2 \left(1 - \frac{\omega_0^2 \omega_1^2}{Q^2(\omega_1^2 - \omega_0^2)^2}\right)}$$

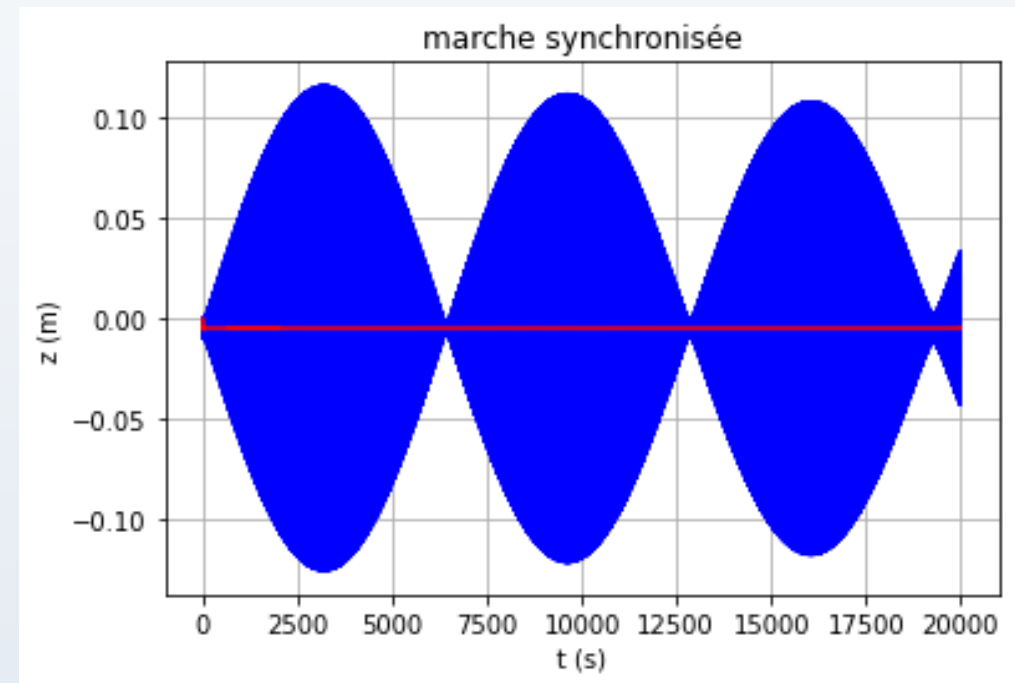
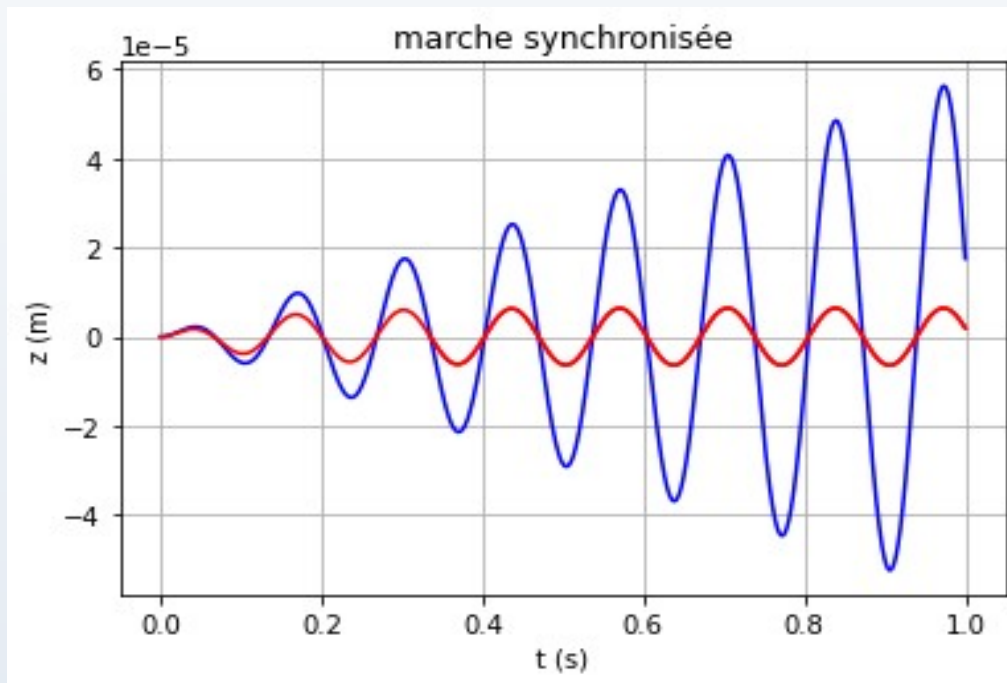


■
$$z(t) = \left(\frac{g}{\omega_1^2} - A\right) \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} \left(\left(\frac{g}{\omega_1^2 - A}\right) \frac{\omega_1}{2Q} - B\omega_0\right) \sin(\omega t) e^{-\frac{\omega_1}{2Q}t} + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) - \frac{g}{\omega_1^2}$$

■
$$z(t) = \left(\frac{g}{\omega_1^2} - \frac{F_0}{M(\omega_1^2 - \omega_0^2)}\right) \cos(\omega_1 t) + \frac{F_0}{M(\omega_1^2 - \omega_0^2)} \cos(\omega_0 t) - \frac{g}{\omega_1^2}$$

Modélisation numérique

Marche à la fréquence propre de la passerelle : $f = 7,45 \text{ Hz}$

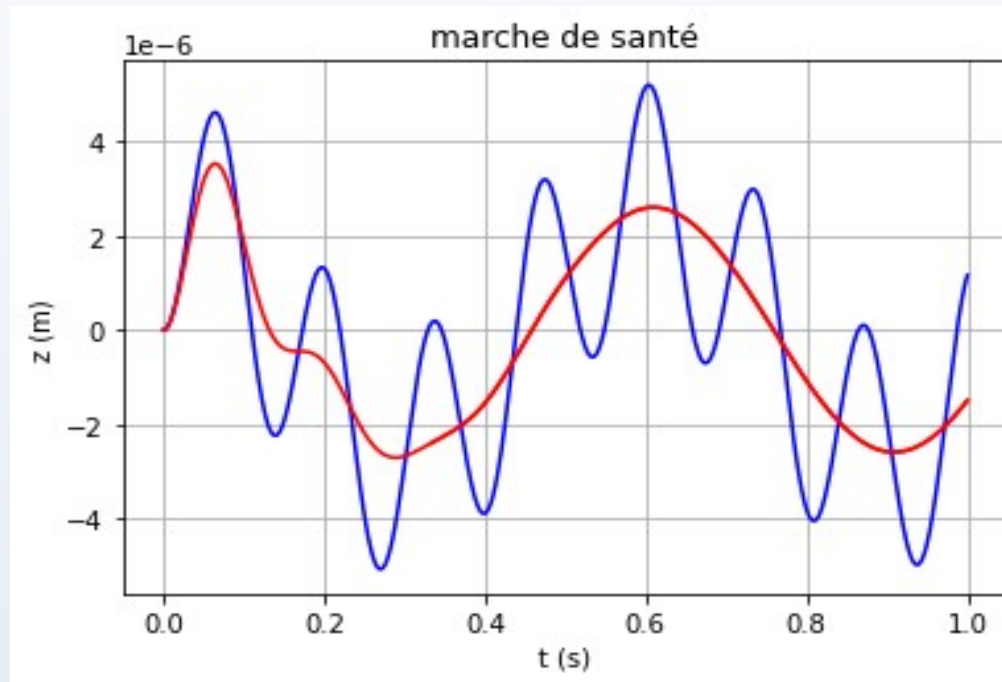


■ Amorti

■ Non amorti

Modélisation numérique

Marche de santé de fréquence : $f = 1,66 \text{ Hz}$



- Amorti
- Non amorti

$$z''(t) = \frac{F_0}{M} \cos(\omega_0 t) - g - \frac{k_{eq}}{M} z(t)$$

$$\ddot{z}(t) = \frac{F_0}{M} \cos(\omega_0 t) - g - \frac{k_{eq}}{M} z(t) - \frac{\lambda}{M} \dot{z}(t)$$



Modélisation numérique

Amélioration de la modélisation :

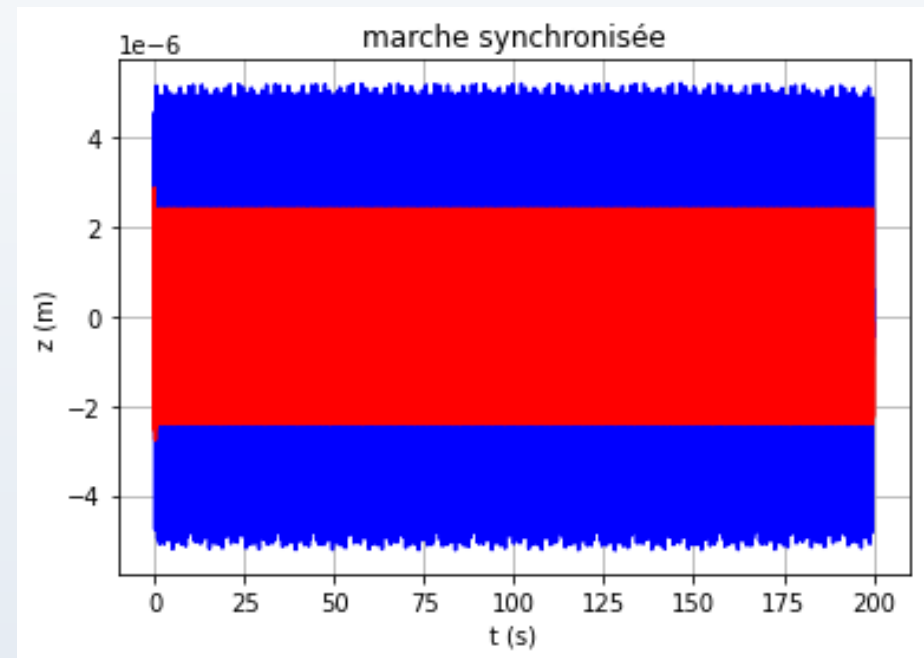
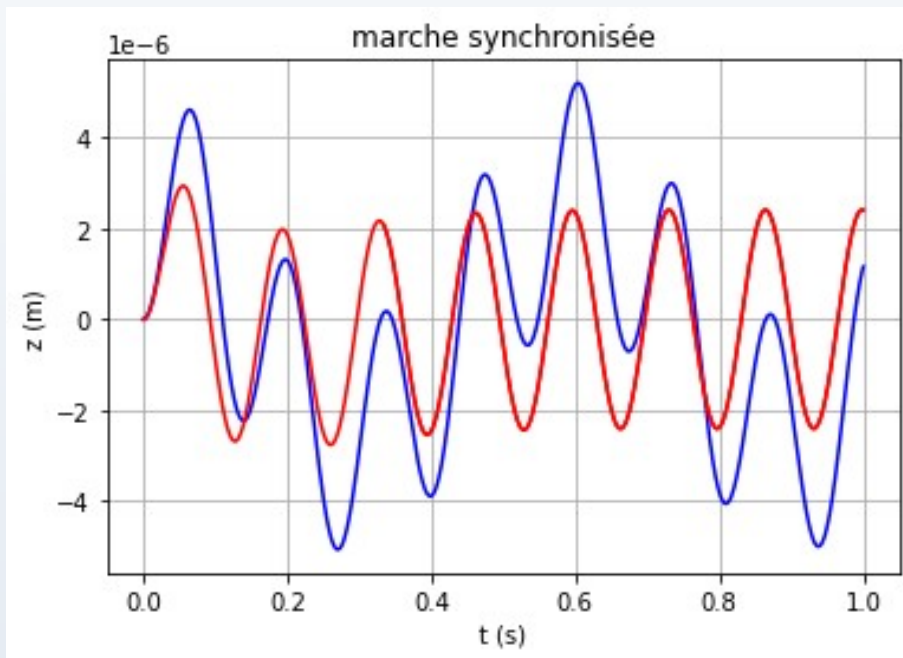
Équation étudiée :


$$\ddot{z}(t) = \frac{F_0}{M} \cos(\omega_0 t) - g - 2kL_0 \sin(\alpha) \left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\arctan(\frac{z}{L_0 \cos(\alpha)} + \tan(\alpha)))} - 1 \right)$$

Modélisation numérique

Amélioration de la modélisation :

Marche à la fréquence propre de la passerelle : $f = 7,45$ Hz



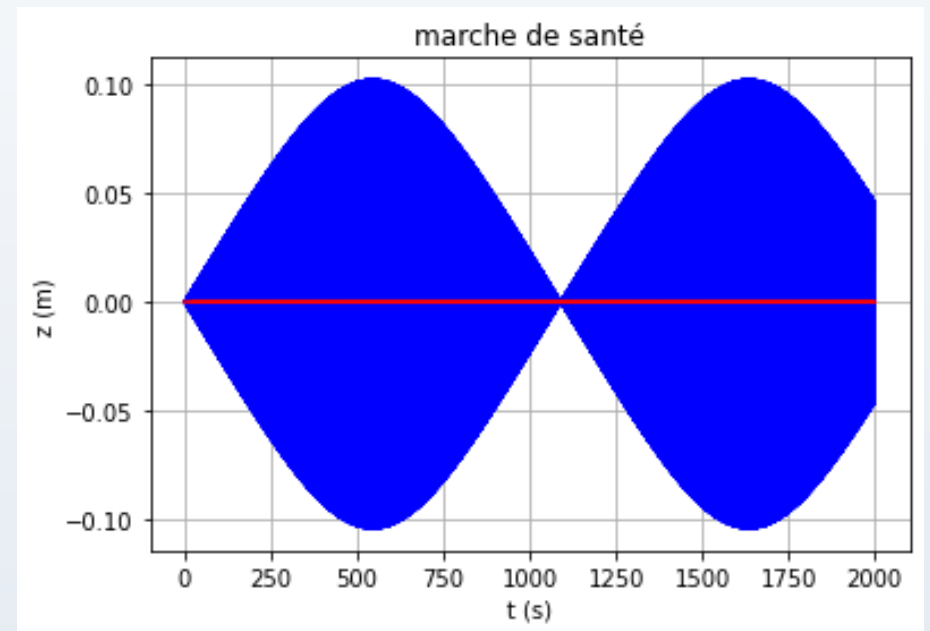
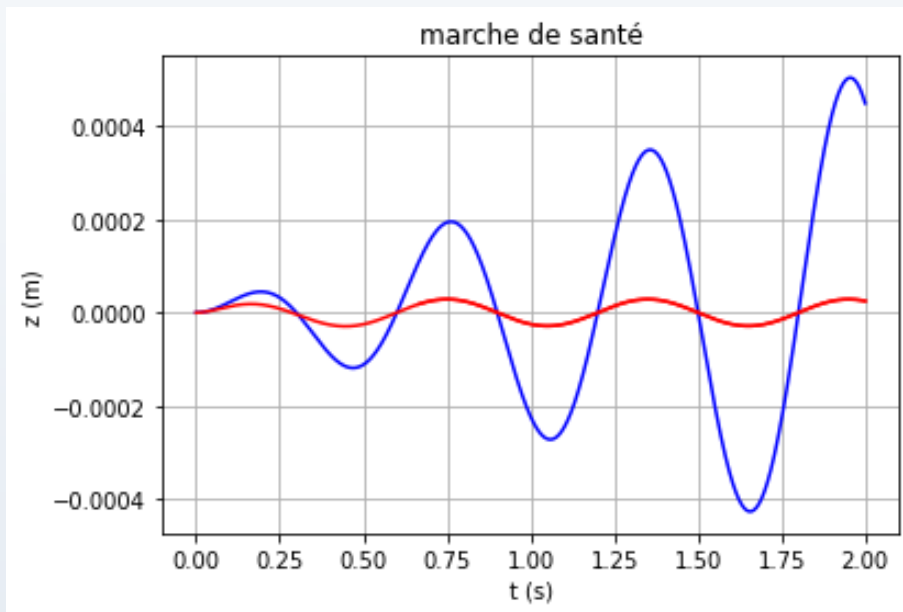
 Amorti


 Non amorti


Modélisation numérique

Amélioration de la modélisation :

Marche de santé de fréquence : $f = 1,66$ Hz



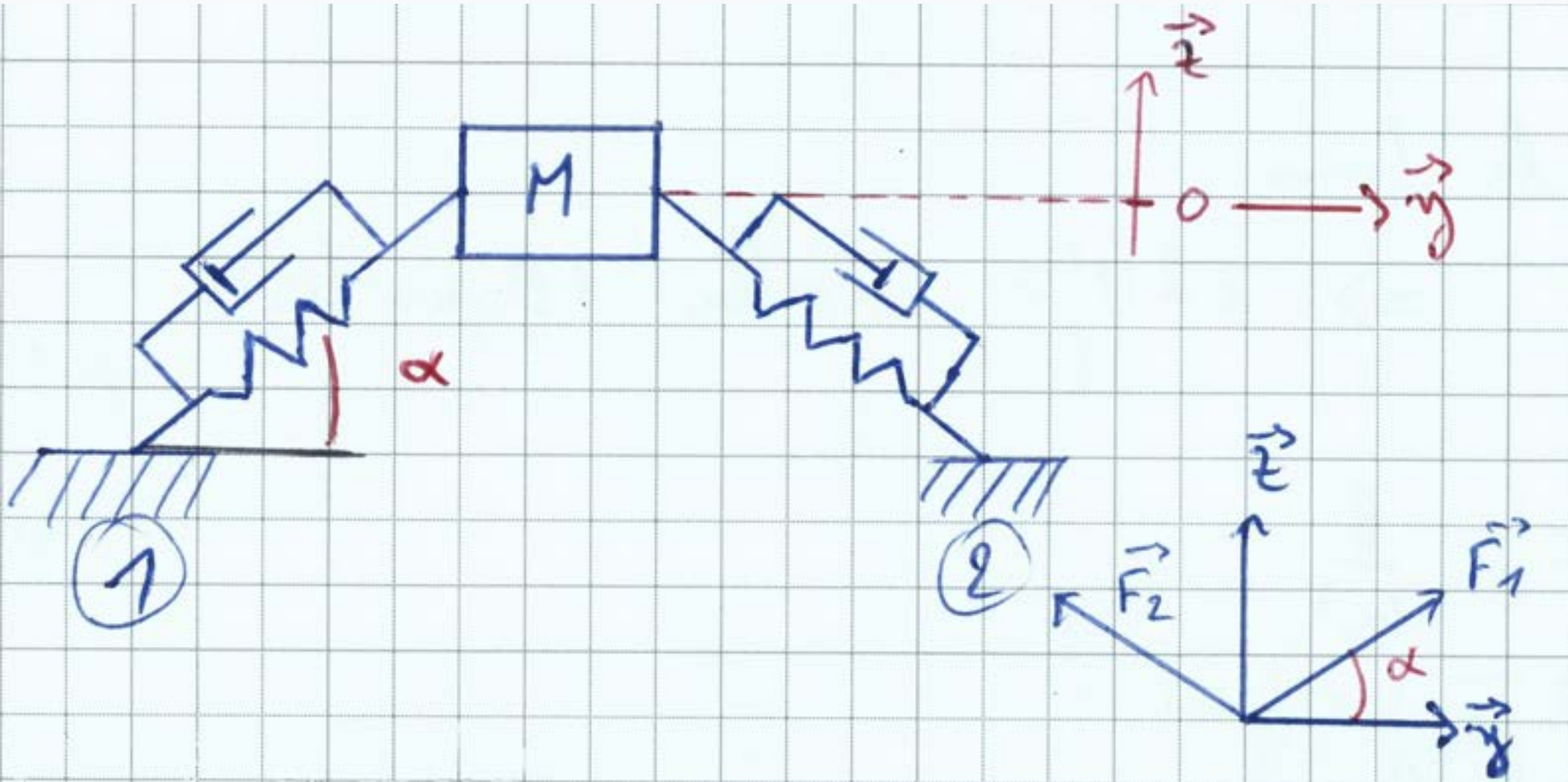
 Amorti

 Non amorti

Comparaison des résultats

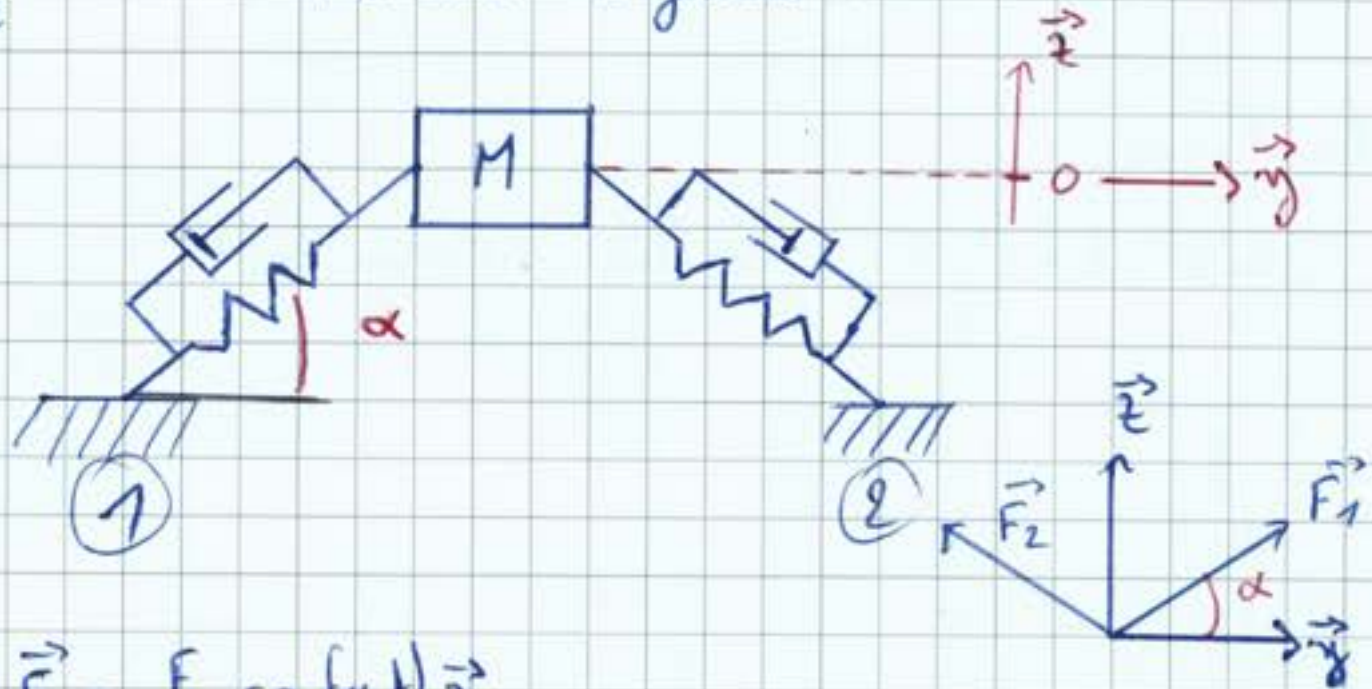
	Passerelle soumise à une marche de santé		Passerelle soumise à une marche synchronisée	
	Analytique	Numérique	Analytique	Numérique
Sans amortissement	Amplitude : 0,0048 mm	Amplitude : d'enveloppe sinusoïdale d'amplitude 10 cm	Amplitude : d'enveloppe linéaire de pente 0,057 mm/s	Amplitude : d'enveloppe sinusoïdale d'amplitude 0,005 mm
Avec amortissement	Amplitude : 0,0025 mm	Amplitude : 0,03 mm	Amplitude : 0,006 mm	Amplitude : 0,0025 mm

Annexes



hypothèse: $\alpha = \text{cte}$

Marche synchronisée:



BA ME: $\vec{F} = F_0 \cos(\omega_0 t) \vec{z}$

$\vec{P} = -Mg \vec{z}$

$\vec{F}_1 = -kz \cos \alpha \cdot \vec{y} - kz \sin \alpha \cdot \vec{z}$

$\vec{F}_2 = -kz \sin \alpha \vec{z} + kz \cos \alpha \vec{y}$

$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -2k \sin(\alpha) z \cdot \vec{z}$

On pose $k_{eq} = 2k \sin \alpha$

$$\Rightarrow \vec{F}_R = -k_{eq} z \cdot \vec{e}$$

PFD: \vec{e} : $m \ddot{z} = -k_{eq} z + F_0 \cos(\omega_0 t) - mg.$

$$\Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{k_{eq}}{m} z = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_0 t) - g.$$

On pose: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}$

équation homogène: $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$

Équation caractéristique: $r^2 + \omega_0^2 = 0$
 $\Rightarrow r = \pm i \omega_0$

z_h de la forme:

$$\Rightarrow z_h(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow z_{p1}(t) = -\frac{g}{\omega_0^2}$$

$z_{p2}(t)$ de la forme:

$$z_{p2}(t) = C t \cos(\omega_0 t) + D t \sin(\omega_0 t), \quad C, D \in \mathbb{R}$$

$$z'_{p2}(t) = C \cos(\omega_0 t) + D \sin(\omega_0 t) - C t \omega_0 \sin(\omega_0 t) + D t \omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$z''_{p2}(t) = -C \omega_0 \sin(\omega_0 t) + D \omega_0 \cos(\omega_0 t) - C \omega_0 \sin(\omega_0 t) + D \omega_0 \cos(\omega_0 t) \\ - C \omega_0^2 t \cos(\omega_0 t) - D \omega_0^2 t \sin(\omega_0 t)$$

z_{p2} sol. ssi:

$$\cos(\omega_0 t) (2D\omega_0 - C\omega_0^2 t + \omega_0^2 C t) + \sin(\omega_0 t) (-2C\omega_0 - D\omega_0^2 t + D\omega_0^2 t) = \frac{F_0}{M} \cos(\omega_0 t)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2D\omega_0 = \frac{F_0}{M} \\ -2C\omega_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = \frac{F_0}{2M\omega_0} \\ C = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_{p2}(t) = \frac{F_0}{2M\omega_0} t \sin(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow z(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2M\omega_0} t \sin(\omega_0 t) - \frac{g}{\omega_0^2}$$

CI:

$$z(0) = 0 = A - \frac{g}{\omega_0^2} \Rightarrow A = \frac{g}{\omega_0^2}$$

$$z'(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2\pi\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2\pi} t \cos(\omega_0 t)$$

$$z'(0) = 0 = B\omega_0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Rightarrow z(t) = \frac{g}{\omega_0^2} \cos(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2\pi\omega_0} t \sin(\omega_0 t) - \frac{g}{\omega_0^2}$$

On rajoute: $\vec{F}_f = -\lambda \dot{z} \vec{e}$

PFD: $\frac{1}{z}$

$$\ddot{z} + \frac{\lambda}{m} \dot{z} + \frac{k_{eq}}{m} z = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_0 t) - g$$

Marche synchronisée résolution analytique

$$\Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{M} \cos(\omega_0 t) - g$$

$$Q = \frac{1}{\lambda} \sqrt{k_{\text{eq}} M}$$

équation homogène:

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

équation caractéristique:

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 < 0 \Rightarrow \text{régime pseudo-périodique}$$

$$\Rightarrow r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

$$\Rightarrow z_h(t) = \left(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \right) e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

$$\text{et } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

$$\Rightarrow z_{p_1}(t) = -\frac{g}{\omega_0^2}$$

z_{p2} de la forme:

$$z_{p2}(t) = C \cos(\omega_0 t) + D \sin(\omega_0 t)$$

$$z'_{p2}(t) = -\omega_0 C \sin(\omega_0 t) + D \omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$z''_{p2}(t) = -\omega_0^2 C \cos(\omega_0 t) - \omega_0^2 D \sin(\omega_0 t)$$

z_{p2} ad.ssi:

$$\begin{aligned} & \cos(\omega_0 t) \left(-\omega_0^2 C + \frac{\omega_0^2}{Q} D + \omega_0^2 C \right) \\ & + \sin(\omega_0 t) \left(-\omega_0^2 D - \frac{\omega_0^2}{Q} C + \omega_0^2 D \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{F_0}{M} \cos(\omega_0 t)$$

Marche synchronisée résolution analytique

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\omega_0^2}{Q} D = \frac{F_0}{M} \\ -\frac{\omega_0^2}{Q} C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = \frac{Q F_0}{M \omega_0^2} \\ C = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_{p2}(t) = \frac{Q F_0}{M \omega_0^2} \sin(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow z(t) = \left(A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \right) e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} + \frac{Q F_0}{M \omega_0^2} \sin(\omega_0 t) - \frac{g}{\omega_0^2}$$

$$z(0) = 0 = A - \frac{g}{\omega_0^2} \Rightarrow A = \frac{g}{\omega_0^2}$$

$$z'(t) = \left(-A \omega_0 \sin(\omega_0 t) + B \omega_0 \cos(\omega_0 t) \right) e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} - \frac{\omega_0}{2Q} e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} \left(A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \right) + \frac{Q F_0}{M \omega_0} \cos(\omega_0 t)$$

$$z'(0) = 0 = B \omega_0 - \frac{A \omega_0}{2Q} + \frac{Q F_0}{M \omega_0} \Rightarrow B = \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{g}{2Q \omega_0} - \frac{Q F_0}{M \omega_0} \right)$$

$$\Rightarrow z(t) = \left(\frac{g}{\omega_0^2} \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{g}{2Q \omega_0} - \frac{Q F_0}{M \omega_0} \right) \sin(\omega_0 t) \right) e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} + \frac{Q F_0}{M \omega_0^2} \sin(\omega_0 t) - \frac{g}{\omega_0^2}$$

Marche de santé:

Cas sans frottements:

hypothèse: $\alpha = \text{const.}$

De même: PFD: \vec{z}

$$\ddot{z} + \frac{k_{eq}}{m} z = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_0 t) - g$$

On pose: $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} \neq \omega_0$

équation homogène : $\ddot{z} + \omega_1^2 z = 0$

équation caractéristique : $r^2 + \omega_1^2 = 0$

$\Rightarrow z_h(t) = A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t)$

$\Rightarrow z_{p1}(t) = -\frac{g}{\omega_1^2}$

z_{p2} de la forme : $z_{p2}(t) = C \cos(\omega_0 t) + D \sin(\omega_0 t)$

$z'_{p2}(t) = -\omega_0 C \sin(\omega_0 t) + \omega_0 D \cos(\omega_0 t)$

$z''_{p2}(t) = -\omega_0^2 C \cos(\omega_0 t) - \omega_0^2 D \sin(\omega_0 t)$

z_{p2} s.l. ssi :

$$\cos(\omega_0 t) (-\omega_0^2 C + \omega_1^2 C) + \sin(\omega_0 t) (-\omega_0^2 D + \omega_1^2 D) = \frac{F_0}{M} \cos(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C(\omega_1^2 - \omega_0^2) = \frac{F_0}{M} \\ D(\omega_1^2 - \omega_0^2) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} C = \frac{F_0}{M(\omega_1^2 - \omega_0^2)} \\ D = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_{p2}(t) = \frac{F_0}{M(\omega_1^2 - \omega_0^2)} \cos(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow z(t) = A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t) + \frac{F_0}{M(\omega_1^2 - \omega_0^2)} \cos(\omega_0 t) - \frac{g}{\omega_1^2}$$

$$z(0) = 0 = A + \frac{F_0}{M(\omega_1^2 - \omega_0^2)} - \frac{g}{\omega_1^2} \Rightarrow A = \frac{g}{\omega_1^2} - \frac{F_0}{M(\omega_1^2 - \omega_0^2)}$$

$$z'(t) = -\omega_1 A \sin(\omega_1 t) + \omega_1 B \cos(\omega_1 t) - \frac{F_0 \omega_0}{M(\omega_1^2 - \omega_0^2)} \sin(\omega_0 t)$$

$$z'(0) = 0 = \omega_1 B \Rightarrow B = 0$$

$$\Rightarrow z(t) = \left(\frac{g}{\omega_1^2} - \frac{F_0}{M(\omega_1^2 - \omega_0^2)} \right) \cos(\omega_1 t) + \frac{F_0}{M(\omega_1^2 - \omega_0^2)} \cos(\omega_0 t) - \frac{g}{\omega_1^2}$$

Cas avec frottements:

$$PFD: \mathbb{R}$$

$$\ddot{z} + \frac{\lambda}{m} \dot{z} + \omega_1^2 z = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) - g$$

$$\Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{\omega_1}{Q} \dot{z} + \omega_1^2 z = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) - g$$

$$Q = \frac{1}{\lambda} \sqrt{k_{eq} m}$$

$$\omega_{\text{pac}}: \omega = \omega_1 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

$$\Rightarrow z_h(t) = (\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)) e^{-\frac{\omega_1}{2Q} t}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow z_{ps}(t) = -\frac{g}{\omega_1^2}$$

$$z_{\text{reel}}(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

$$z'_{\text{reel}}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B \cos(\omega_0 t)$$

$$z''_{\text{reel}}(t) = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t) - \omega_0^2 B \sin(\omega_0 t)$$

z_{reel} admet :

$$\cos(\omega_0 t) \left(-\omega_0^2 A + \frac{\omega_1}{Q} \omega_0 B + \omega_1^2 A \right) + \sin(\omega_0 t) \left(-\omega_0^2 B + \frac{\omega_1}{Q} \omega_0 A + \omega_1^2 B \right) = \frac{F_0}{M} \cos(\omega_0 t)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A (\omega_1^2 - \omega_0^2) + B \frac{\omega_0 \omega_1}{Q} = \frac{F_0}{M} \\ B (\omega_1^2 - \omega_0^2) + A \frac{\omega_0 \omega_1}{Q} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B \frac{\omega_0 \omega_1}{Q (\omega_1^2 - \omega_0^2)} = \frac{F_0}{M} \\ B + A \frac{\omega_0 \omega_1}{Q (\omega_1^2 - \omega_0^2)} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{F_0}{M (\omega_1^2 - \omega_0^2) \left(1 - \frac{\omega_0^2 \omega_1^2}{Q^2 (\omega_1^2 - \omega_0^2)^2} \right)} \\ B = - \frac{\omega_0 \omega_1 F_0}{Q M (\omega_1^2 - \omega_0^2)^2 \left(1 - \frac{\omega_0^2 \omega_1^2}{Q^2 (\omega_1^2 - \omega_0^2)^2} \right)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z(t) = \left(\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) \right) e^{-\frac{\omega_1 t}{2Q}} + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) - \frac{g}{\omega_1^2}$$

CI:

$$z(0) = 0 = \alpha - \frac{g}{\omega_1^2} + A \Rightarrow \alpha = \frac{g}{\omega_1^2} - A$$

$$z'(t) = -\frac{\omega_1}{2Q} \left(\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) \right) e^{-\frac{\omega_1 t}{2Q}} + e^{-\frac{\omega_1 t}{2Q}} \left(-\alpha \omega \sin(\omega t) + \beta \omega \cos(\omega t) \right) - A \omega_0 \sin(\omega_0 t) + B \omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$z'(0) = 0 = -\frac{\alpha \omega_1}{2Q} + \omega \beta + B \omega_0 \Rightarrow \beta = \frac{1}{\omega} \left(\frac{\alpha \omega_1}{2Q} - B \omega_0 \right)$$

$$\Rightarrow z(t) = \left(\left(\frac{g}{\omega_1^2} - A \right) \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} \left(\left(\frac{g}{\omega_1^2} - A \right) \frac{\omega_1}{2Q} - B \omega_0 \right) \sin(\omega t) \right) e^{-\frac{\omega_1 t}{2Q}} + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) - \frac{g}{\omega_1^2}$$

détermination du facteur de qualité :

utilisation du dévirement logarithmique :

$$\delta = \ln\left(\frac{U(t)}{U(t+T)}\right) \approx \frac{\pi}{Q}$$

$$\text{et } n\delta = \ln\left(\frac{U(t)}{U(t+nT)}\right)$$

ici :

$$\ln\left(\frac{1}{0,3}\right) = 2\delta \Rightarrow \delta \approx 1,2$$

$$\Rightarrow \boxed{Q \approx 2,6}$$

détermination de la raideur de l'acier / de la structure :

$$\text{On a : } F = k x$$

$$\text{et } \sigma = \frac{F}{S} = \frac{E}{L_0} x$$

$$\Rightarrow F = \frac{ES}{L_0} x$$

$$\text{donc } k = \frac{ES}{L_0}$$

hypothèses : seules les 2
IPN qui soutiennent la
structure sont prises en
compte.

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$L_0 = 35 \text{ m}$$

$$S = 0,5 \text{ m}^2$$

$$k = 30 \times 10^8 \text{ N/m}$$

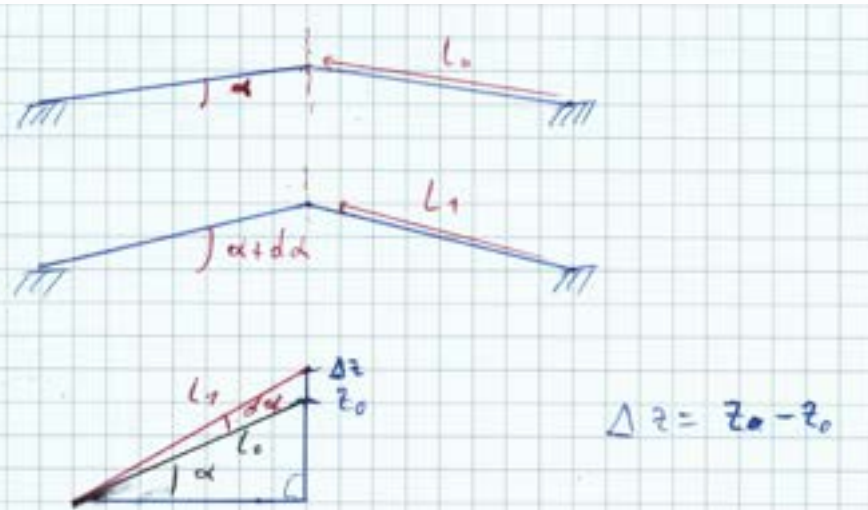
$$k_{eq} = 299875000 \text{ N/m}$$

détermination d'un coefficient d'amortissement équivalent de la structure:

$$Q = \frac{1}{\lambda} \sqrt{k_{eq} \pi'} = 2,6$$

$$\Rightarrow \lambda = 2463455$$

Équation non linéaire



projections:

$$\begin{cases} L_0 \cos \alpha = L_1 \cos (\alpha + d\alpha) \\ L_0 \sin \alpha + \Delta z = L_1 \sin (\alpha + d\alpha) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta z + L_0 \sin \alpha}{L_0 \cos \alpha} = \frac{L_1 \sin (\alpha + d\alpha)}{L_1 \cos (\alpha + d\alpha)}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta z}{L_0 \cos \alpha} + \tan \alpha = \tan (\alpha + d\alpha)$$

$$\Rightarrow d\alpha = \text{Arctan} \left(\frac{\Delta z}{L_0 \cos \alpha} + \tan \alpha \right) - \alpha$$

De plus: $L_1 = L_0 \frac{\cos (\alpha)}{\cos (\alpha + d\alpha)}$

$$\Rightarrow L_1 - L_0 = L_0 \left(\frac{\cos (\alpha)}{\cos \left(\text{Arctan} \left(\frac{\Delta z}{L_0 \cos \alpha} + \tan \alpha \right) \right)} - 1 \right)$$

Équation non linéaire

PFD: \vec{z}

On pose $z_0 = 0$ donc $\Delta z = z$

$$-2k \sin(\alpha)(L_1 - l_0) - mg + F_0 \cos(\omega_0 t) = m \ddot{z}$$

$$\Rightarrow \ddot{z} = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_0 t) - g - 2k L_0 \sin(\alpha) \left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos\left(\arctan\left(\frac{z}{L_0 \cos \alpha} + \tan \alpha\right)\right)} - 1 \right)$$

Tracé de la résolution analytique, marche synchronisée

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4 k=30*10**8 #N/m
5 keq=299875000 #N/m
6 w0=46.82 #rad/s
7 M=136803 #kg
8 z0=0 #m
9 F0=740 #N
10 g=0 #m/s**2
11 Q=2.6 #facteur de qualité
12 w=w0*np.sqrt(1-1/(4*Q**2)) #rad/s
13
14
15 T=np.linspace(0,1,5000)
16 #T=np.linspace(0.5,1,5000)
17
18 #sans amortissement
19 Z=[(g/w0**2*np.cos(w0*t)+F0/(2*M*w0)*t*np.cos(w0*t)-g/(w0**2)) for t in T]
20
21
22 #avec amortissement
23 Zam=[((g/(w0**2)*np.cos(w*t)+1/w*(g/(2*Q*w0)-Q*F0/(M*w0))*np.sin(w*t))*
24 np.exp(-w0*t/(2*Q))+Q*F0/(M*w0**2)*np.sin(w0*t)-g/(w0**2)) for t in T]
25
26
27 plt.clf()
28 plt.plot(T,Z,'b')
29 plt.plot(T,Zam,'r')
30 plt.title(label='marche synchronisée')
31 plt.ylabel('z (m)')
32 plt.xlabel('t (s)')
33 plt.grid()
34 plt.show()
```


Tracé de la résolution analytique, marche de santé

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4 k=30*10**8 #N/m
5 keq=299875000 #N/m
6 w0=10.47 #rad/s
7 w1=46.82 #rad/s
8 z0=0 #m
9 F0=740 #N
10 g=0 #m/s**2
11 M=136803 #kg
12 Q=2.6 #facteur de qualité
13 w=w1*np.sqrt(1-1/(4*Q**2)) #rad/s
14 A=F0/(M*(w1**2-w0**2)*(1-w0*w1/(Q**2*(w1**2-w0**2)**2)))
15 B=-A*w0*w1/(Q*(w1**2-w0**2))
16
17 T=np.linspace(0,1,5000)
18 #T=np.linspace(0,0.5,5000)
19
20
21 #sans amortissement
22 Z=[((g/(w1**2)-F0/(M*(w1**2-w0**2)))*np.cos(w1*t)+F0/(M*(w1**2-w0**2))
23 *np.cos(w0*t)-g/(w1**2)) for t in T]
24
25 #avec amortissement
26 Zam=[((g/w1**2-A)*np.cos(w*t)+1/w*((g/w1**2-A)*w1/(2*Q)-B*w0)*np.sin(w*t))
27 *np.exp(-w1*t/(2*Q))-g/w1**2+A*np.cos(w0*t)+B*np.sin(w0*t) for t in T]
28
29
30
31 plt.clf()
32 plt.grid()
33 plt.title(label='position du centre de la passerelle \n (marche de santé)')
34 plt.ylabel('z (m)')
35 plt.xlabel('t (s)')
36 plt.plot(T,Z,'b')
37 plt.plot(T,Zam,'r')
38 plt.show()
```

Tracé de la résolution numérique

```
1 import numpy as np
2 import math as m
3 from scipy.integrate import odeint
4 import matplotlib.pyplot as plt
5
6 k=30*10**8 #N/m
7 F0=740 #N
8 M=136803 #kg
9 g=0 #m/s^2
10 w0=10.47 #rad/s
11 w0=46.82 #rad/s
12 l=2463455
13 alpha=0.05 #rad
14 T=2 #s
15
16
17
18
19 X0 = [0,0.]
20
21 def F(X,t) :
22     z,zp = X
23     return np.array([zp, (-M*g+F0*m.cos(w0*t) - 2*k*z*m.sin(alpha))/M])
24
25 def G(X,t) :
26     z,zp = X
27     return np.array([zp, (-M*g+F0*m.cos(w0*t) - 2*k*z*m.sin(alpha) - l*zp)/M])
28
29
30 t_vec = np.arange(0,T,T/10000)
31
32 X_vec = odeint(F,X0,t_vec)
33 Xam_vec = odeint(G,X0,t_vec)
34
35
36 z_liste = [X[0] for X in X_vec]
37 zam_liste = [X[0] for X in Xam_vec]
```

```
38
39 J=[]
40 t=[]
41 for k in range(3333,10000):
42     J.append(zam_liste[k])
43     t.append(t_vec[k])
44
45
46
47 plt.clf()
48 plt.title('marche synchronisée')
49 plt.plot(t_vec,z_liste,'b')
50 plt.plot(t_vec,zam_liste,'r')
51 plt.plot(t,J,'r')
52 plt.ylabel('z (m)')
53 plt.xlabel('t (s)')
54 plt.grid()
55 plt.show()
56
```

Tracé de la résolution numérique équation non linéaire

```
1 import numpy as np
2 import math as m
3 from scipy.integrate import odeint
4 import matplotlib.pyplot as plt
5
6
7 k=30*10**8 #N/m
8 L0=35 #m
9 F0=740 #N
10 M=136803 #kg
11 g=0 #m/s**2
12 w0=10.47 #rad/s
13 w0=46.82 #rad/s
14 alpha=0.05 #rad
15 l=2463455
16
17
18 N=10000
19 T=1
20 e=T/N
21
22 x0 = [0,0]
23
24 def F(X,t) :
25     z,zp = X
26     return np.array([zp, (-M*g+F0*m.cos(w0*t)-2*k*m.sin(alpha)
27 *L0*((m.cos(alpha))/(m.cos(m.atan((z/(L0*m.cos(alpha)))
28 +m.tan(alpha))))-1))/M])
29
30
31 def G(X,t) :
32     z,zp = X
33     return np.array([zp, (-M*g-l*zp+F0*m.cos(w0*t)-2*k*m.sin(alpha)
34 *L0*((m.cos(alpha))/(m.cos(m.atan((z/(L0*m.cos(alpha)))
35 +m.tan(alpha))))-1))/M])
36
37 t_vec = np.arange(0,T,e)
38
```

Tracé de la résolution numérique équation non linéaire

```
39
40 X_vec = odeint(F,X0,t_vec)
41 Xam_vec = odeint(G,X0,t_vec)
42
43
44
45 z_liste = [X[0] for X in X_vec]
46 zam_liste = [X[0] for X in Xam_vec]
47
48 J=[]
49 t=[]
50 for k in range(3333,10000):
51     J.append(zam_liste[k])
52     t.append(t_vec[k])
53
54
55 plt.clf()
56 plt.plot(t_vec,z_liste,'b')
57 plt.plot(t_vec,zam_liste,'r')
58 plt.plot(t,J,'r')
59 plt.title(label='marche synchronisée')
60 plt.ylabel('z (m)')
61 plt.xlabel('t (s)')
62 plt.grid()
63 plt.show()
64
```