Comment produire et distribuer l’énergie du tramway ?

La métropole veut fluidifier le trafic aux heures de pointe. (G CHP/CC BY 2.5)

GERARD Mathis
25831

Sommaire

Introduction

Flèche max admissible en tête de support :

- 1.5% de la hauteur

Hauteur moyenne d'un support : 6 m

Cahier des charges :

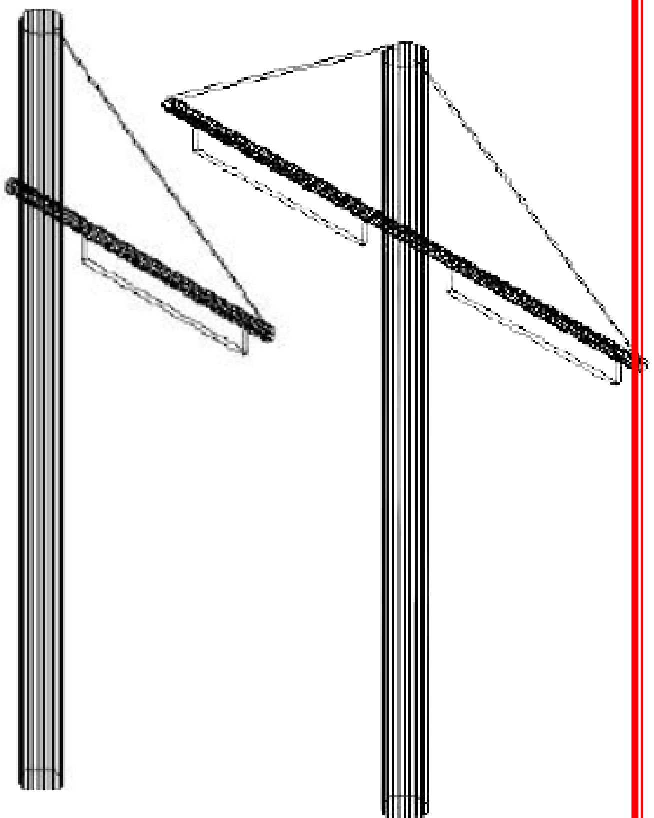
flèche max admissible : 0.09 m

Selon CCTP LAC – MOEG-ACT-304-LAC-001-D

Objectif

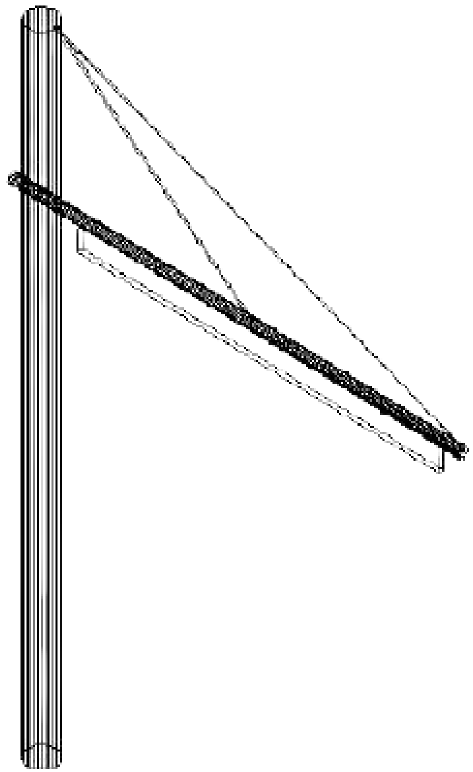
- Dimensionner différentes solutions pour soutenir la caténaire.
- Mesure de la flèche à l'aide d'une étude de résistance des matériaux.
- modifications des solutions pour répondre aux exigences de marge de hauteur des caténaires.

Dimensionnement support caténaire

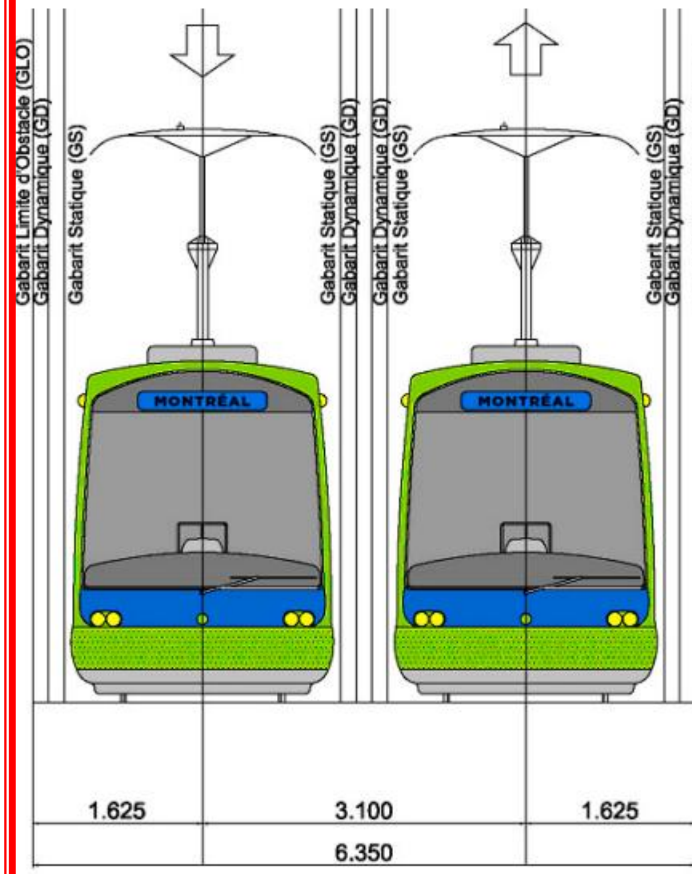


Voie unique

Central double voies

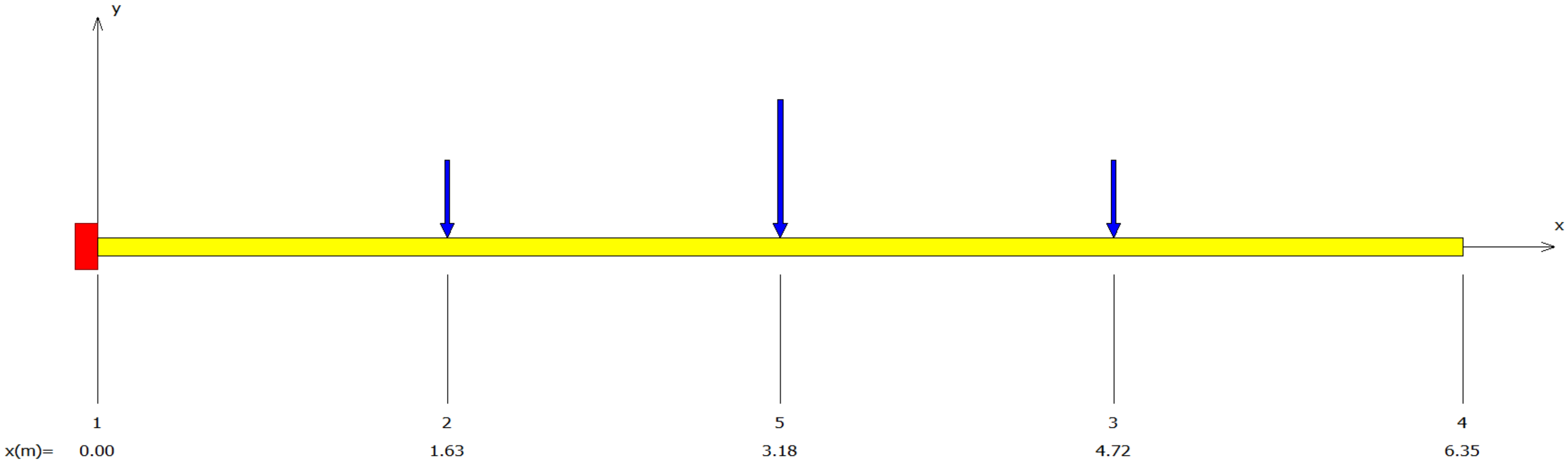


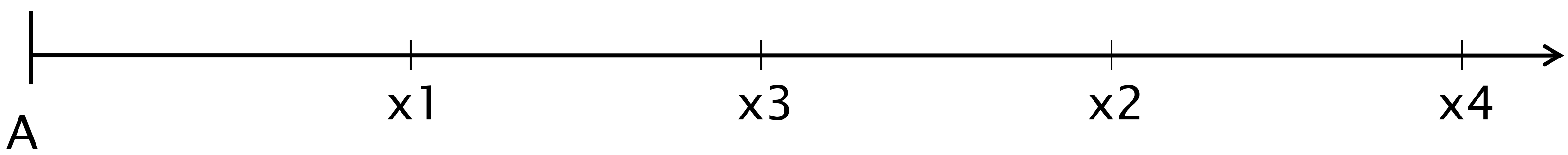
Latéral double voie



3E SOUS LIVRABLE 1.3 LIGNE AÉRIENNE DE CONTACT

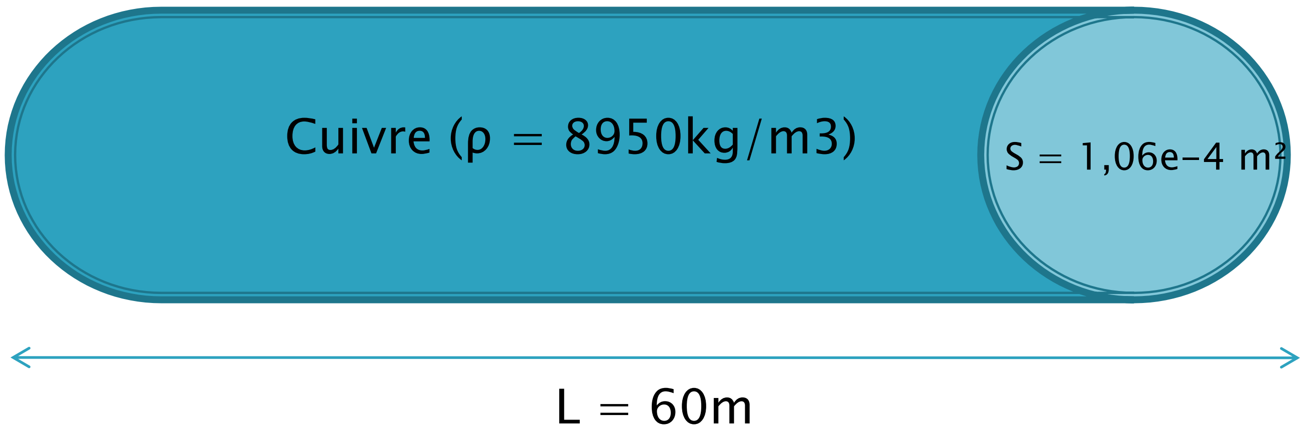
Modèle poutre choisi:





$$\overrightarrow{Ax1} = \mathrm{a}.\vec{x}$$
$$\overrightarrow{Ax2} = \mathrm{b}.\vec{x}$$
$$\overrightarrow{Ax4} = \mathrm{L}.\vec{x}$$
$$\overrightarrow{Ax3} = \frac{L}{2}.\vec{x}$$

Force de la caténaire sur le support:



$m = \rho.L.S = 56$ kg

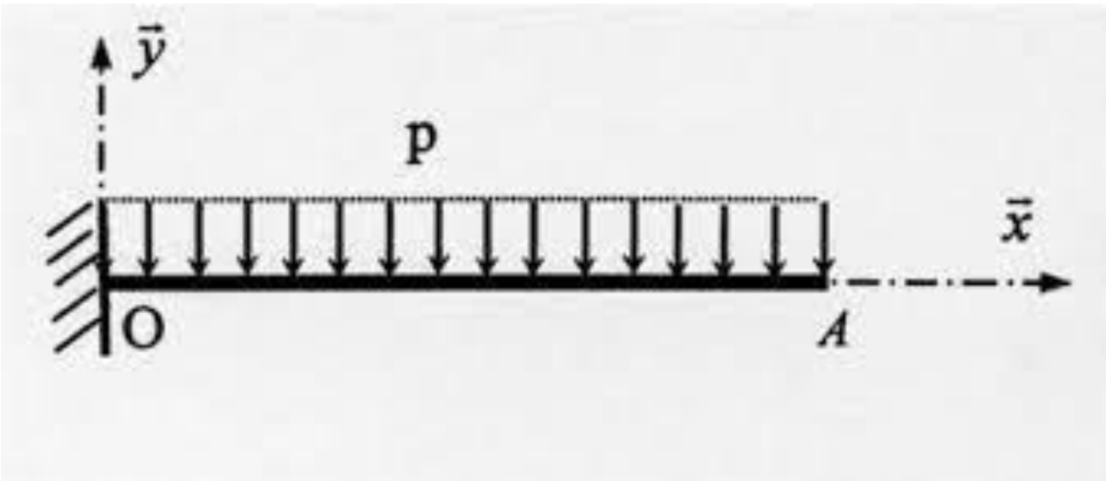
$F1 = F2 = m.g = 560$ N

m : masse caténaire

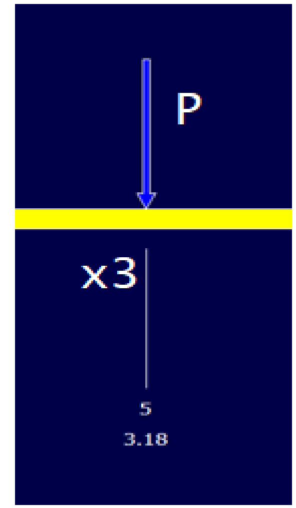
F1/F2 : Forces poids caténaire sur support

Poids du support:

Force linéique:



En un point:



$P = q.L$ avec $q = \rho.g.S$

- S : Section du support
- ρ : masse volumique du matériau du support
- g : intensité de la pesanteur

Isolement de la poutre:

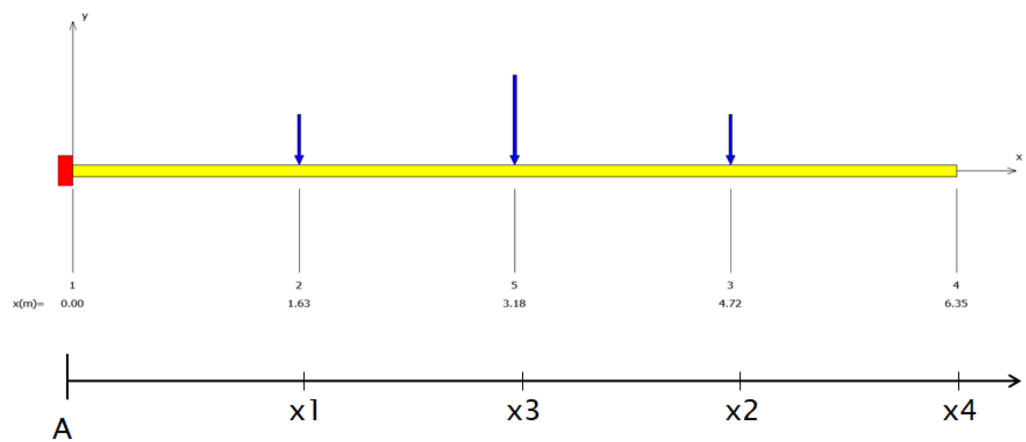
$$\{T(F1->poutre)\}_{x1} = {}_{x1}\begin{Bmatrix} 0 & - \\ -F1 & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_R$$

$$\{T(F2->poutre)\}_{x2} = {}_{x2}\begin{Bmatrix} 0 & - \\ -F2 & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_R$$

$$\{T(poids->poutre)\}_{x3} = {}_{x3}\begin{Bmatrix} 0 & - \\ -qL & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_R$$

BAME + PFD

$$\{T(bâti->poutre)\}_{A} = {}_{A}\begin{Bmatrix} 0 & - \\ F1+F2+qL & - \\ - & a.F1+b.F2+q.\frac{L^2}{2} \end{Bmatrix}_R$$



Calcul des moments fléchissant en fonction des différents segments:

Calcul des torseurs de cohésions sur chaque segment:

Sur [Ax1] :

$$\{Tcoh\} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ -(F1+F2+qL) & - \\ - & -(a.F1+b.F2+q.\frac{L^2}{2}-x(F1+F2+qL)) \end{Bmatrix}_{R,\,G}$$

Sur [x1x3] :

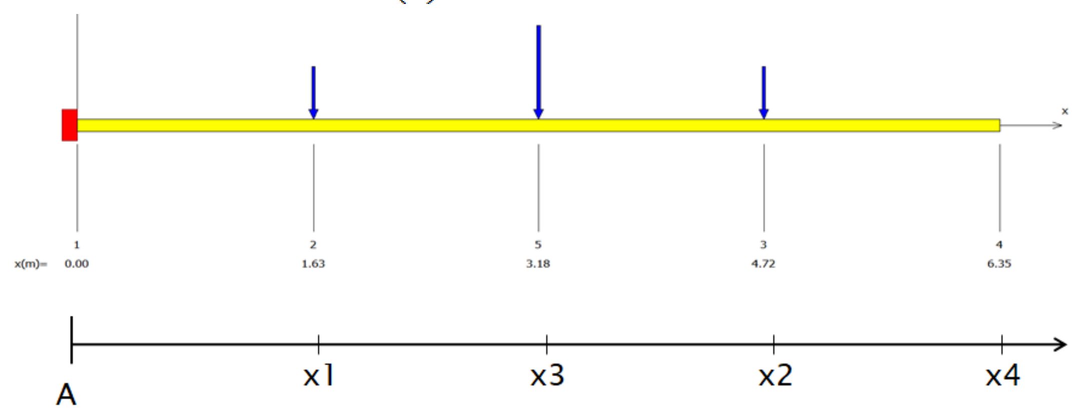
$$\{Tcoh\} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ -q.L-F2 & - \\ - & -q.L.(\frac{L}{2}-x)-F2.(b-x) \end{Bmatrix}_{R,\,G}$$

Sur [x3x2] :

$$\{Tcoh\} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ -F2 & - \\ - & -F2.(b-x) \end{Bmatrix}_{R,G}$$

Sur [x2x4] :

$$\{Tcoh\} = +\ \Sigma \text{ forces à droite}$$
$$= \{0\}$$



Calcul des moments des moments de flexion autour de l'axe (Oz) : (Mfz)

Sur le segment [A x1] :

$$\boxed{\mathrm{Mfz(x)} = -(a.F1 + b.F2 + q.\frac{L^2}{2} - x(F1 + F2 + qL))}$$

Sur le segment [x1 x3] :

$$\boxed{\mathrm{Mfz(x)} = -(\mathrm{q}.\frac{\mathrm{L}^2}{2} + \mathrm{F2.b}) + \mathrm{x}.(\mathrm{q.L} + \mathrm{F2})}$$

Sur le segment [x3 x2] :

$$\boxed{\mathrm{Mfz(x)} = -\mathrm{F2.b} + \mathrm{F2.x}}$$

Sur le segment [x2 x4] :

$$\boxed{\mathrm{Mfz(x)} = 0}$$

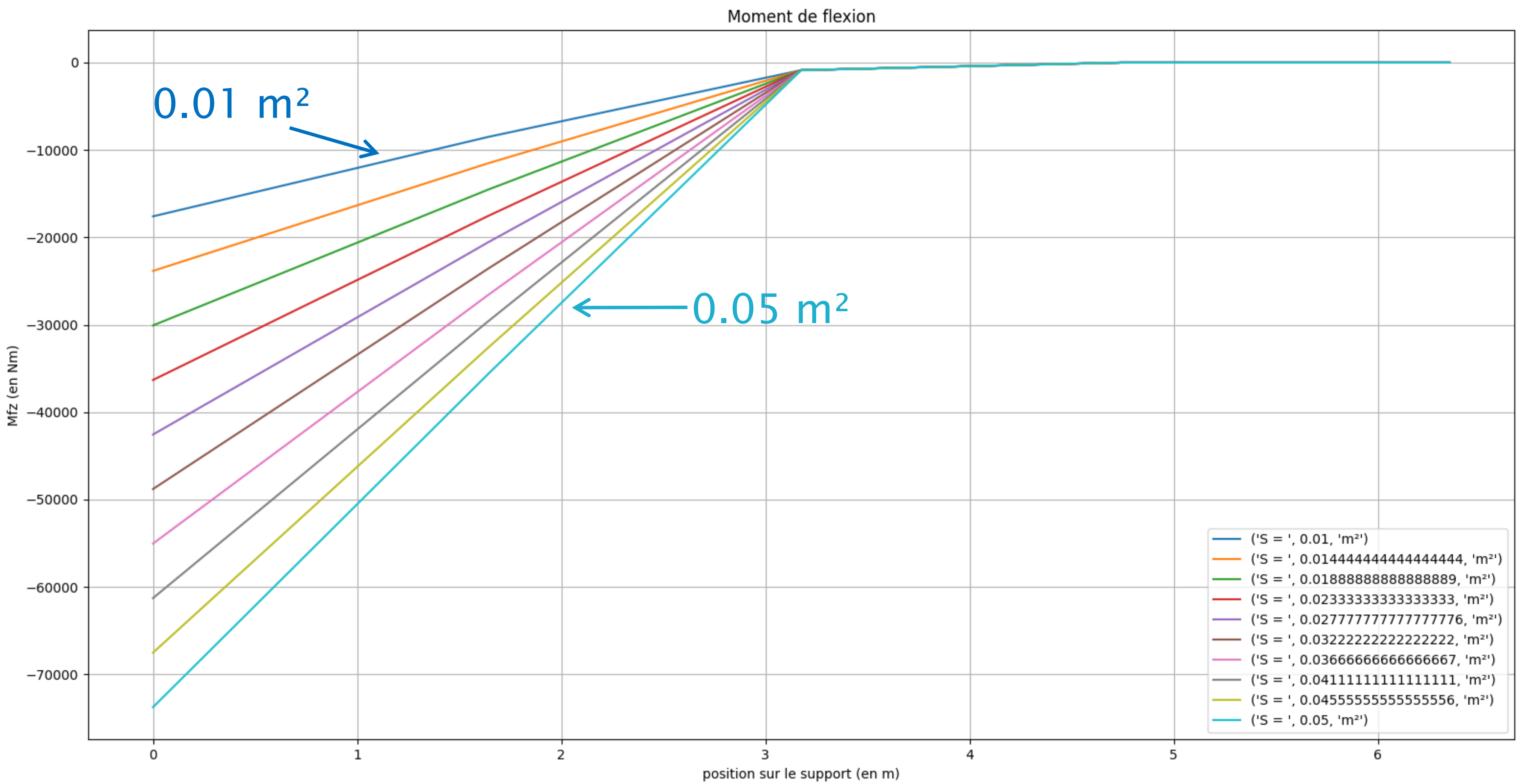
Quels matériaux choisir ?

- Fonte :
  - $\rho = 7100$ kg/m3
  - E = 100000 MPa

- Acier :
  - $\rho = 7850$ kg/m3
  - E = 203000 MPa

Cas de la fonte par calcul

- Moments fléchissant pour différentes sections : (python)



Flèche pour différentes sections

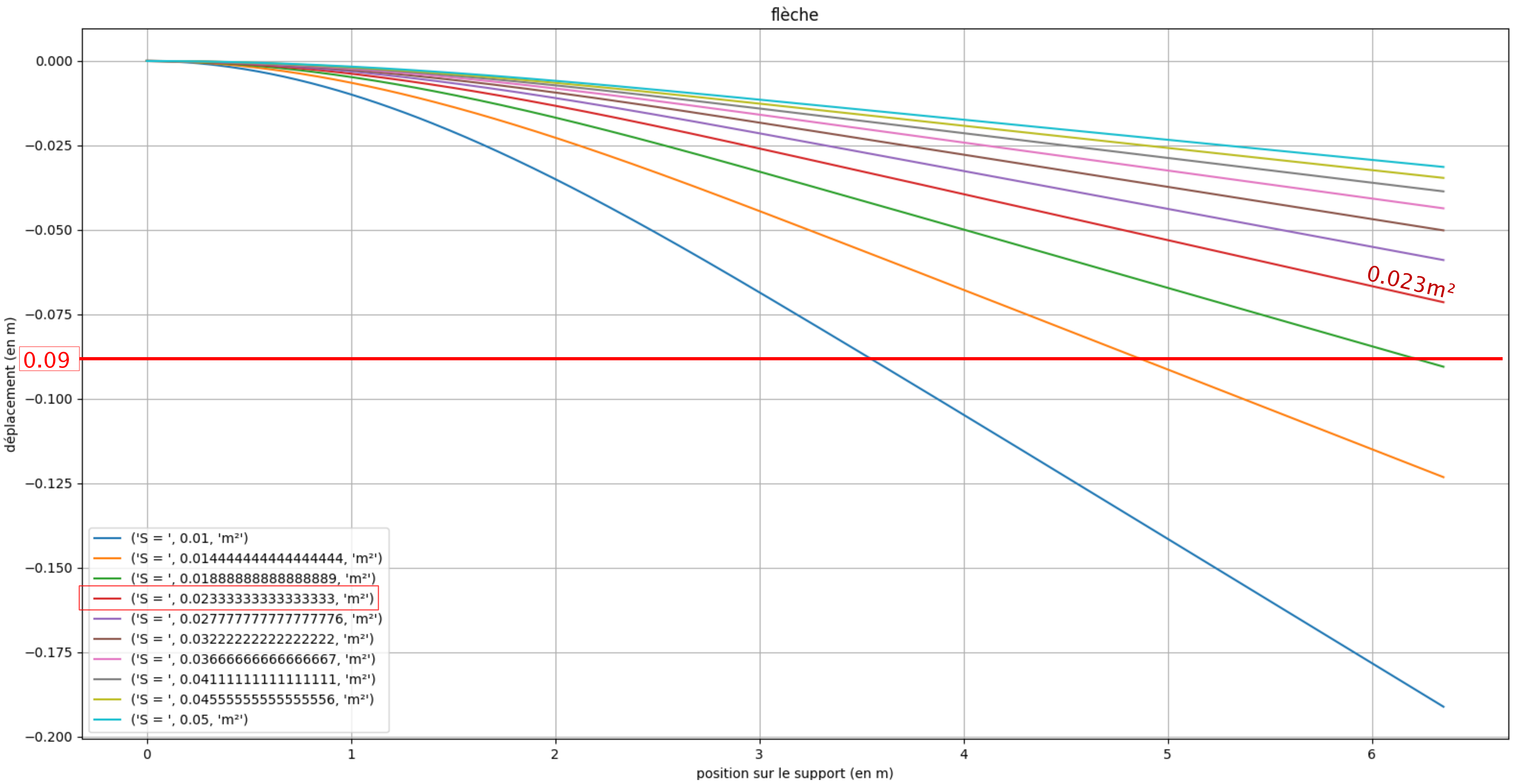
$$E.Igz.y''(x) = Mfz(x) \quad \text{avec} \quad Igz = \frac{S^2}{4.\pi}$$

➢ Dépend également de la section

Intégrer avec python : Comment déterminer les constantes d'intégrations ?

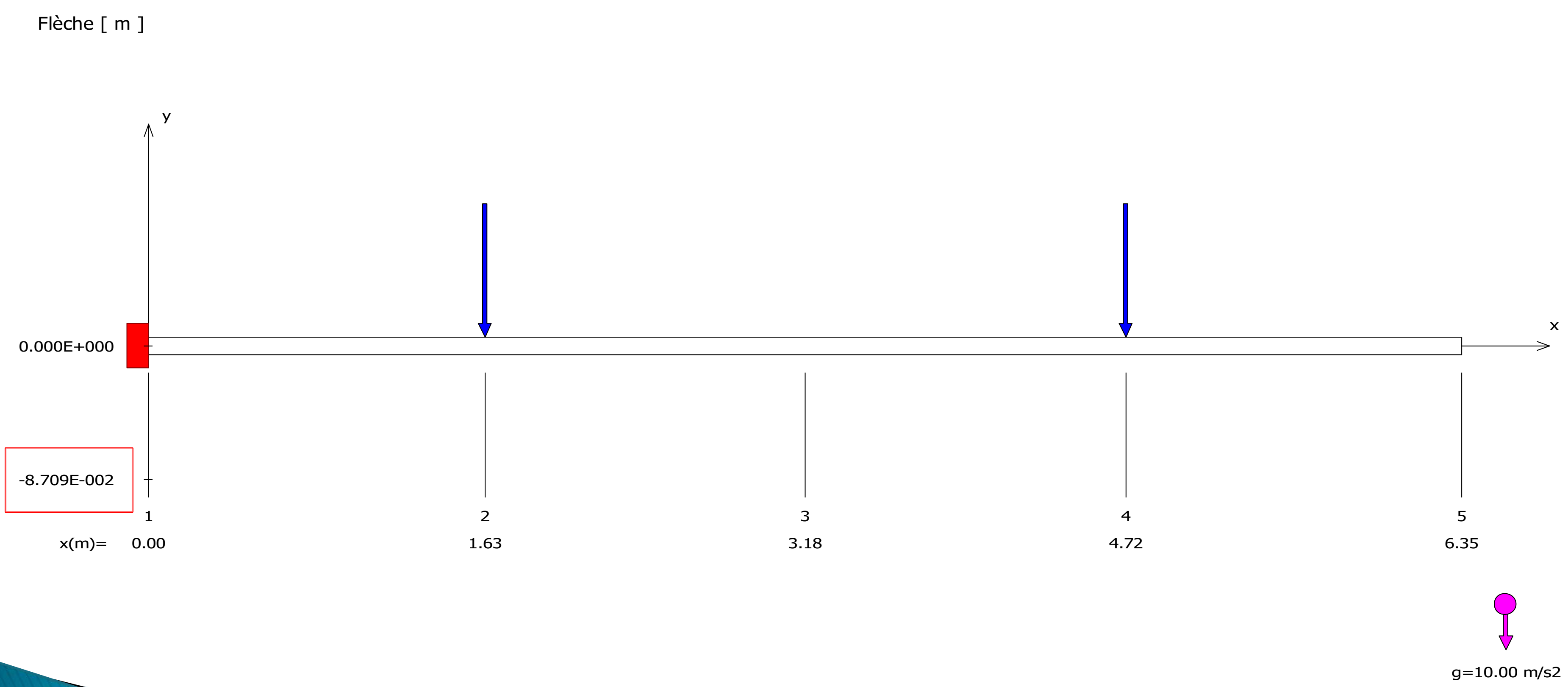
- une liste pour chaque segment
- Conditions aux limites

Flèche pour différentes section (python)

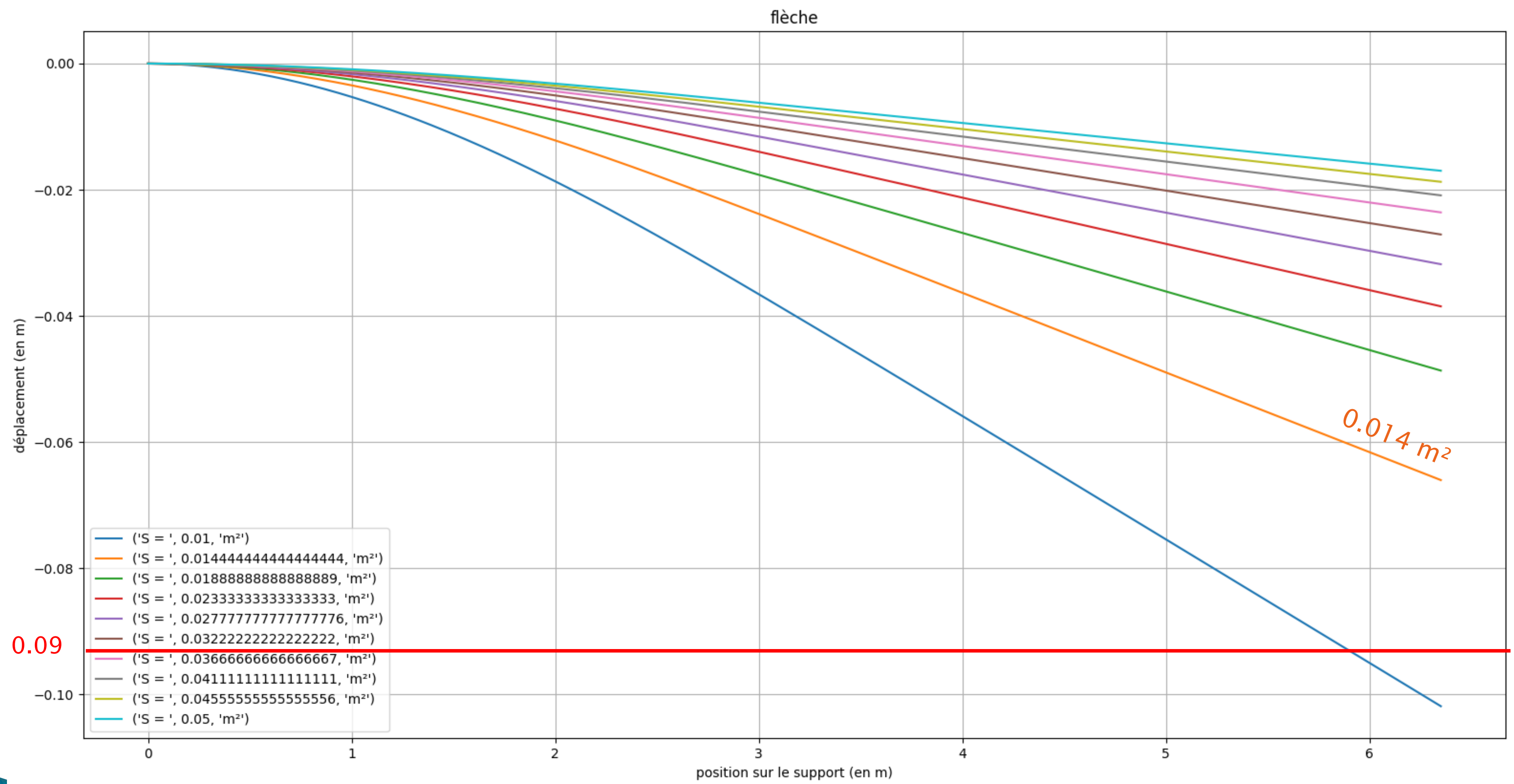


Cas de la fonte par simulation :

- Flèche : (RDM le Mans)

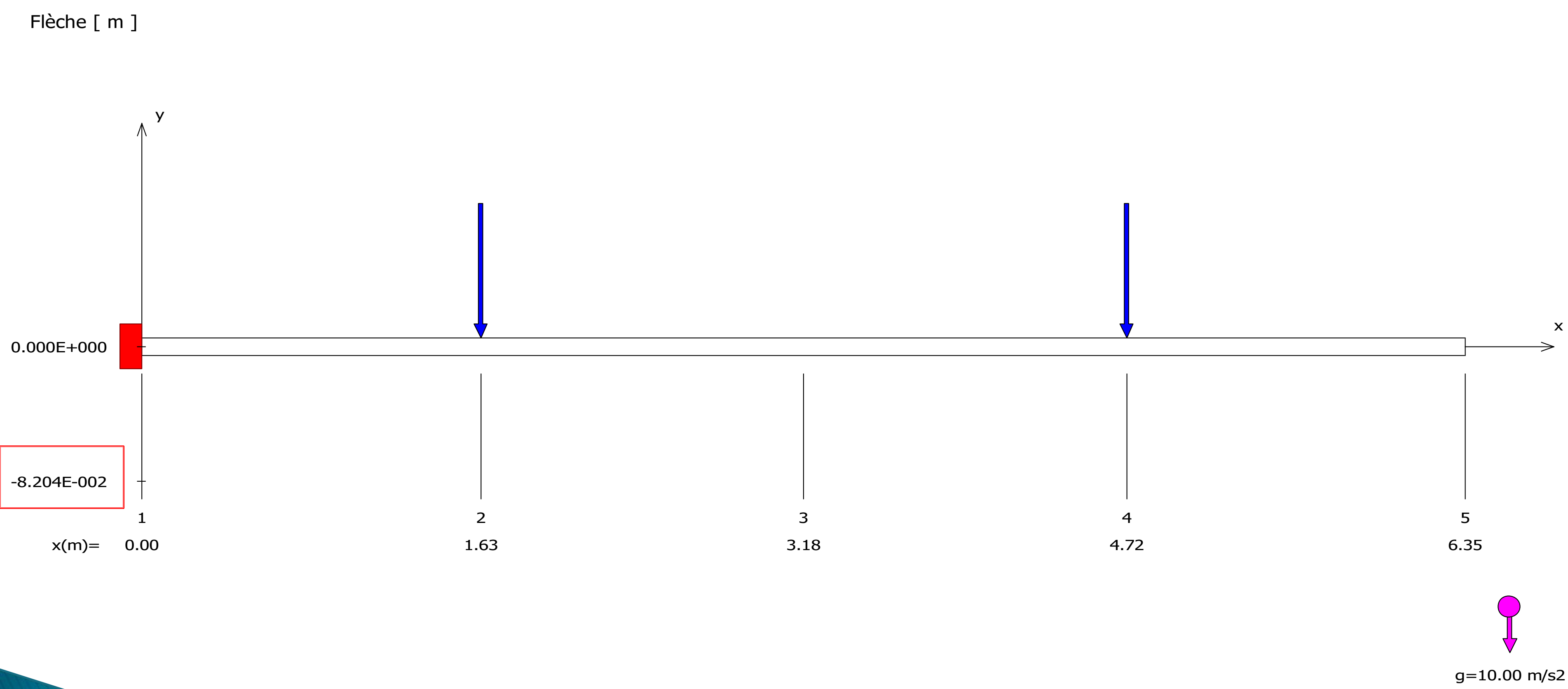


Cas de l'acier par calcul :



Cas de l'acier par simulation :

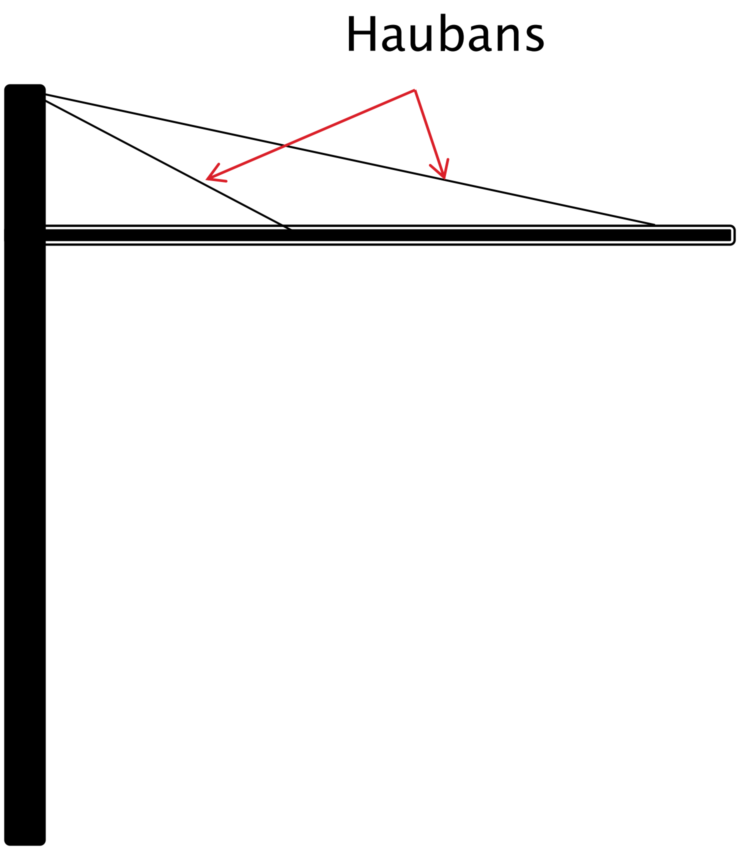
Flèche : (RDM le Mans)



BILAN :

	Fonte	Acier
Section (m^2)	0.023	0.014
Flèche (m)	0.087	0.082
Matière utilisée (kg)	1065	697
Prix pour l’installation	~ 250 €	~ 1 000 €

Pour aller plus loin



$\overrightarrow{Ax1} = a.\vec{x}$
$\overrightarrow{Ax2} = b.\vec{x}$
$\overrightarrow{Ax4} = L.\vec{x}$
$\overrightarrow{Ax3} = \frac{L}{2}\vec{x}$

PFS :

On isole la poutre :

BAME :

$$\{T(F1->poutre)\}_{x1} = {}_{x1}\begin{Bmatrix} 0 & - \\ -F1 & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_R$$

$$\{T(F2->poutre)\}_{x2} = {}_{x2}\begin{Bmatrix} 0 & - \\ -F2 & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_R$$

$$\{T(poids->poutre)\}_{x3} = {}_{x3}\begin{Bmatrix} 0 & - \\ -qL & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_R$$

$$\{T(bâti->poutre)\}_{A} = {}_{A}\begin{Bmatrix} 0 & - \\ F1+F2+qL & - \\ - & a.F1+b.F2+q.\frac{L^2}{2} \end{Bmatrix}_R$$

Pour avoir la force du bâti sur la poutre :

On déplace au point A :

$\overrightarrow{M(A, F1 \rightarrow Poutre)} = \overrightarrow{M(x1, F1 \rightarrow Poutre)} + \overrightarrow{Ax1} \wedge \vec{R}$
$\overrightarrow{M(A, F1 \rightarrow Poutre)} = \vec{0} + a.\vec{x} \wedge -F1.\vec{y}$
$\overrightarrow{M(A, F1 \rightarrow Poutre)} \boxed{= -a.F1.\vec{z}}$

$\overrightarrow{M(A, F2 \rightarrow Poutre)} = \overrightarrow{M(x2, F2 \rightarrow Poutre)} + \overrightarrow{Ax2} \wedge \vec{R}$
$\boxed{= -b.F2.\vec{z}}$

$\overrightarrow{M(A, poids \rightarrow Poutre)} = \overrightarrow{M(x3, poids \rightarrow Poutre)} + \overrightarrow{Ax3} \wedge \vec{R}$
$= \vec{0} + \frac{L}{2}\vec{x} \wedge -q.L.\vec{y}$
$\overrightarrow{M(A, poids \rightarrow Poutre)} \boxed{= -q.\frac{L^2}{2}\vec{z}}$

Annexe 1

Calcul des torseurs de cohésions sur chaque segments :

Sur le segment [A x1] : x ϵ [0, a]

$$\{Tcoh\} = -\Sigma \text{ forces à gauche} \qquad \overrightarrow{AG} = x.\vec{x}$$

$$= - \{T(bâti -> poutre)\}_G$$

$$\overrightarrow{M(G, bâti \rightarrow Poutre)} = \overrightarrow{M(A, bâti \rightarrow Poutre)} + \overrightarrow{GA} \wedge \vec{R}$$

$$= a.F1 + b.F2 + q.\frac{L^2}{2}\vec{Z} + (-x.\vec{x}) \wedge (F1+F2+qL).\vec{y}$$

$$\boxed{\overrightarrow{M(G, bâti \rightarrow Poutre)} = (a.F1 + b.F2 + q\frac{L^2}{2} - x\,(F1+F2+qL)).\vec{z}}$$

Donc

$$\{Tcoh\} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ -(F1+F2+qL) & - \\ - & -(a.F1+b.F2+q.\dfrac{L^2}{2} - x(F1+F2+qL)) \end{Bmatrix}_{R,\,G}$$

Sur le segment [x1 x3] : x ϵ [a, $\frac{L}{2}$]

$$\{Tcoh\} = +\Sigma \text{ forces à droite}$$

$$= + [\{T(poids -> poutre)\}_G + \{T(F2 -> poutre)\}_G]$$

$$\overrightarrow{M(G, poids \rightarrow Poutre)} = \overrightarrow{M(x3, poids \rightarrow Poutre)} + \overrightarrow{Gx3} \wedge \vec{R}$$

$$= \vec{0} + (\frac{L}{2} - x).\vec{x} \wedge (-q.L).\vec{y}$$

$$\boxed{\overrightarrow{M(G, poids \rightarrow Poutre)} = -q.L.(\frac{L}{2} - x).\vec{z}}$$

$$\overrightarrow{M(G, poids \rightarrow Poutre)} = \overrightarrow{M(x3, poids \rightarrow Poutre)} + \overrightarrow{Gx3} \wedge \vec{R}$$

$$= \vec{0} + (b - x).\vec{x} \wedge -F2.\vec{y}$$

$$\boxed{\overrightarrow{M(G, poids \rightarrow Poutre)} = -F2.(b - x).\vec{z}}$$

Donc:

$$\{Tcoh\} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ -q.L - F2 & - \\ - & -q.L.(\dfrac{L}{2} - x) - F2.(b - x) \end{Bmatrix}_{R,\,G}$$

Sur le segment [x3 x2] : x ϵ [$\frac{L}{2}$, b]

$$\{Tcoh\} = +\Sigma \text{ forces à droite}$$

$$= + \{T(F2 -> poutre)\}_G$$

$$\overrightarrow{M(G, F2 \rightarrow Poutre)} = \overrightarrow{M(x2, F2 \rightarrow Poutre)} + \overrightarrow{Gx2} \wedge \vec{R}$$

$$= \vec{0} + (b - x).\vec{x} \wedge -F2.\vec{y}$$

$$\overrightarrow{M(G, F2 \rightarrow Poutre)} = -F2.(b - x).\vec{z}$$

Donc :

$$\{Tcoh\} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ -F2 & - \\ - & -F2.(b - x) \end{Bmatrix}_{R,G}$$

Sur le segment [x2 x4] : x ϵ [b, L]

$$\{Tcoh\} = +\Sigma \text{ forces à droite}$$

$$= \{0\}$$

Annexe 2

Calcul des moments des moments de flexion autour de l'axe (Oz) : (Mfz)

Sur le segment [A x1] :

$$\boxed{\text{Mfz}(x) = -(a.F1 + b.F2 + q.\frac{L^2}{2} - x(F1 + F2 + qL))}$$

En x = a :

$$\text{Mfz}(a) = -(a.F1 + b.F2 + q.\frac{L^2}{2} - a.F1 - a.(F2 + q.L))$$
$$= -(b.F2 + q.\frac{L^2}{2}) + a.(F2 + q.L)$$

Sur le segment [x1 x3] :

$$\boxed{\text{Mfz}(x) = -q.\frac{L^2}{2} + q.Lx - F2.b + x.F2}$$
$$= -(q.\frac{L^2}{2} + F2.b) + x.(q.L + F2)$$

En x = a :

$$\text{Mfz}(a) = -(b.F2 + q.\frac{L^2}{2}) + a.(F2 + q.L)$$

En x = L/2 :

$$\text{Mfz}(\frac{L}{2}) = -(b.F2 + q.\frac{L^2}{2}) + \frac{L}{2}.(F2 + q.L)$$
$$= -F2.b + \frac{L}{2}.F2$$

Sur le segment [x3 x2] :

$$\boxed{\text{Mfz}(x) = -F2.b + F2.x}$$

En x = L/2 :

$$\text{Mfz}(\frac{L}{2}) = -F2.b + \frac{L}{2}.F2$$

En x = b :

$$\text{Mfz}(b) = -F2.(b - b) = 0$$

Sur le segment [x2 x4] :

$$\boxed{\text{Mfz}(x) = 0}$$

Annexe 3

Traçage des courbes mfz(x) selon plusieurs sections avec python :

Initialisation de toutes les constantes et des expressions de mfz :

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

S = np.linspace(0.01, 0.05, 10)
a = 1.625
b = 4.725
L = 6.350
F1 = 560
F2 = 560
ro = 7850
g = 9.81
E = 203000e6

C1 = 0
C2 = 0
C3 = 0
C4 = 0

x1 = np.linspace(0,a,100)
x2 = np.linspace(a,L/2,100)
x3 = np.linspace(L/2,b,100)
x4 = np.linspace(b,L,100)


for k in range(len(S)):
    Igz = (S[k]**2)/(4*np.pi)
    q = ro*g*S[k]
    def segment1(x,q):
        return -((a*F1 + b*F2 + q*((L**2)/2))-x*(F1 + F2 + q*L))

    def segment2(x,q):
        return -(q*((L**2)/2)+F2*b) + x*(q*L + F2)

    def segment3(x,q):
        return -F2*b + F2*x

    def segment4(x,q):
        return 0
```

Fonction traçage moment de flexion :

```python
def mfz(q):
    l1 = []
    X = []
    for x in x1:
        l1.append(segment1(x,q))
        X.append(x)
    for x in x2:
        l1.append(segment2(x,q))
        X.append(x)
    for x in x3:
        l1.append(segment3(x,q))
        X.append(x)
    for x in x4:
        l1.append(segment4(x,q))
        X.append(x)
    return X, l1
x,y = mfz(q)
plt.plot(x,y,label=('S = ', S[k],'m²'))
```

Calcul de l'expression de la flèche maximale :

Sur le segment [A x1] :

$E.Igz.y''(x) = Mfz_{[A x1]}$

$E.Igz y''(x) = (F1 + F2 + q.L).x - (a.F1 + b.F2 + q.\frac{L^2}{2})$

$E.Igz y'(x) = (F1 + F2 + q.L).\frac{x^2}{2} - (a.F1 + b.F2 + q.\frac{L^2}{2}).x + C1$

$E.Igz y(x) = (F1 + F2 + q.L).\frac{x^3}{6} - (a.F1 + b.F2 + q.\frac{L^2}{2}).\frac{x^2}{2} + C1.x + C2$

En 0

$y(x=0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C2 = 0$

$y'(x=0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C1 = 0$

Fleche max :

$$\boxed{y(x=a) = \frac{1}{E.Igz}((F1 + F2 + q.L).\frac{a^3}{6} - (a.F1 + b.F2 + q.\frac{L^2}{2}).\frac{a^2}{2})}$$

Sur le segment [x1 x3] :

$E.Igz y''(x) = (q.L + F2).x - (q.\frac{L^2}{2} + F2.b)$

$E.Igz y'(x) = (q.L + F2).\frac{x^2}{2} - (q.\frac{L^2}{2} + F2.b).x + C3$

$E.Igz y(x) = (q.L + F2).\frac{x^3}{6} - (q.\frac{L^2}{2} + F2.b).\frac{x^2}{2} + C3.x + C4$

Recherche des constantes d'intégrations par le calcul trop longues, on utilise python :

Annexe 6

Première intégration :

```
def integration1(x,q):
    return -((a*F1 + b*F2 + q*((L**2)/2))*x-(F1 + F2 + q*L)*(x**2)/2)

def integration2(x,q):
    return -(q*((L**2)/2)+F2*b)*x + ((x**2)/2)*(q*L + F2)

def integration3(x,q):
    return -F2*b*x + F2*((x**2)/2)

def integration4(x,q):
    return 0

C2 = integration1(x1[-1],q) - integration2(x1[-1],q)
C3 = integration2(x2[-1],q)+C2 - integration3(x2[-1],q)
C4 = integration3(x3[-1],q)+C3

def courbeint(q):
    l1 = []
    X = []
    for x in x1:
        l1.append(integration1(x,q))
        X.append(x)
    for x in x2:
        l1.append(integration2(x,q)+C2)
        X.append(x)
    for x in x3:
        l1.append(integration3(x,q)+C3)
        X.append(x)
    for x in x4:
        l1.append(integration4(x,q)+C4)
        X.append(x)
    return X, l1
xi,yi = courbeint(q)
plt.plot(xi,yi)
```

Annexe 7

Deuxième intégration + Fonction traçage de la flèche :

```
    def integration11(x,q):
        return -((a*F1 + b*F2 + q*((L**2)/2))*((x**2)/2)-(F1 + F2 + q*L)*((x**3)/6))
    def integration12(x,q):
        return -(q*((L**2)/2)+F2*b)*((x**2)/2) + ((x**3)/6)*(q*L + F2) + C2*x
    def integration13(x,q):
        return -F2*b*((x**2)/2) + F2*((x**3)/6) + C3*x
    def integration14(x,q):
        return C4*x
    C5 = 0
    C6 = integration11(x1[-1],q) - integration12(x1[-1],q)
    C7 = integration12(x2[-1],q)+C6 - integration13(x2[-1],q)
    C8 = integration13(x3[-1],q)+C7 - integration14(x3[-1],q)

    def fleche(q):
        l1 = []
        X = []
        for x in x1:
            l1.append((integration11(x,q))/(E*Igz))
            X.append(x)
        for x in x2:
            l1.append((integration12(x,q)+C6)/(E*Igz))
            X.append(x)
        for x in x3:
            l1.append((integration13(x,q)+C7)/(E*Igz))
            X.append(x)
        for x in x4:
            l1.append((integration14(x,q)+C8)/(E*Igz))
            X.append(x)
        return X, l1
    x1i,y1i = fleche(q)
    plt.plot(x1i,y1i, label=('S = ', S[k],'m²'))
```

Annexe 8

BILAN :

Matière utilisée :

- Fonte : $V = S.L$

  A.N : $V = 0.023 \times 6.350 = 0.15$ m3

  $m = \rho.V$

  A.N : $m = 7100 \times 0.15 = 1065$ kg

  Prix au kg : 0,25 euro

Prix total : A.N : $1065 \times 0.25 = 265$ €

- Acier : $V = 0.09\ m^3$

  $M = 697$ kg

  Prix au kg : 1.50 euros

Prix total : A.N : $697 \times 1.50 = 1045$ €

Annexe 9

GERARD Mathis
25831